Resultado de Investigación

Matemática básica

José Weymar González Pulido
José Antonio Chacón Benavidez
Luís Ángel Fonseca Correa
Autores

$$\left(\frac{c}{d}\right)^n + \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^{n+m}$$

$X+Y=3$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$y=3x+6$

$$\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{7}{9}$$

$$\left[b^x\right]^z = b^{x.\ z}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{6}$$

Universidad Mariana
Res. MEN 1362 del 3 de febrero de 1983

Matemática básica

José Weymar González Pulido
José Antonio Chacón Benavidez
Luís Ángel Fonseca Correa
Autores

$$\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{7}{9}$$

$$\left[b^{x}\right]^{z} = b^{x.\ z}$$

Universidad Mariana
Res. MEN 1362 del 3 de febrero de 1983

Editorial UNIMAR

Colección Resultado de Investigación

2023

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

González Pulido, José Weymar, autor

Matemática básica / autores, José Weymar González Pulido, José Antonio Chacón Benavidez, Luis Ángel Fonseca Correa. -- San Juan de Pasto: Editorial Unimar, 2023.

1 recurso en línea: archivo de texto: PDF.-- (Resultado de investigación).

Incluye glosario -- Incluye bibliografía.

ISBN 978-628-7548-22-0

1. Matemáticas - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. 2. Matemáticas - Enseñanza - Problemas, ejercicios, etc. I. Chacón Benavidez, José Antonio, autor II. Fonseca Correa, Luis Ángel, autor

CDD: 510 ed. 23 CO-BoBN– a1119965

Universidad Mariana

Res. MEN 1362 del 3 de febrero de 1983

Título del libro: *Matemática básica*

e-ISBN: 978-628-7548-22-0

DOI: https://doi.org/10.31948/editorialunimar.205

Formato: 18 x 26cm – Digital

Páginas: 163

Año: 2023

Pares Evaluadores

Dra. **Mawency Vergel Ortega**

Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia

Dr. **Élgar Gualdrón Pinto**

Universidad de Pamplona, Colombia

Mg. **German Arturo Marcillo Hernández**

Universidad Mariana, Colombia

Editorial UNIMAR

Luz Elida Vera Hernández

Directora Editorial UNIMAR

Leidy Stella Rivera Buesaquillo

Corrección de Estilo

Daniela Velásquez Torres

Diseño y Diagramación

Correspondencia:

Editorial UNIMAR, Universidad Mariana

San Juan de Pasto, Nariño, Colombia, Calle 18 No. 34 – 104

Tel: 6027244460 - Ext. 185

E-mail: editorialunimar@umariana.edu.co

Depósito Digital

Biblioteca Nacional de Colombia, Grupo Procesos Técnicos, Calle 24, No. 5 - 60 Bogotá D.C., Colombia.

Biblioteca Hna. Elisabeth Guerrero N. f.m.i. Calle 18 No. 34 - 104 Universidad Mariana, San Juan de Pasto, Colombia.

Disponible en: http://editorial.umariana.edu.co/libros

Cítese como: González-Pulido, J. W., Chacón-Benavidez, J. A. y Fonseca-Correa, L. Á. (2023). *Matemática básica.* Editorial UNIMAR. https://doi.org/10.31948/editorialunimar.205

Contenido

Presentación

En el marco del desarrollo del proyecto de investigación titulado*: Estrategias didácticas para el fortalecimiento del desempeño en las pruebas saber en estudiantes de dos instituciones educativas,* con código SGI 3403 del grupo de investigación SIEK Saberes interdisciplinares en construcción, del programa Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Facultad de Estudios a Distancia de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, se planteó, dentro de los objetivos específicos, el diseño de materiales didácticos para fortalecer el aprendizaje de las matemáticas de una forma adecuada, creativa y significativa, en pro de un buen desempeño de los estudiantes de dos instituciones educativas en las pruebas Saber que realiza el ICFES, año tras año; pruebas que miden el estado de aprendizaje de los estudiantes, por lo tanto, se crea este material con el fin de contribuir al cumplimiento de este objetivo en los educandos de la básica primaria.

Los autores de este texto estamos convencidos de que la enseñanza de las matemáticas se debe transformar y que esta transformación se debe realizar dentro de la universidad, en especial en las licenciaturas que es donde se forman y preparan los futuros maestros de Colombia. Por ello, los docentes de la Licenciatura en Educación Básica de la UPTC debemos generar las condiciones necesarias y proporcionar herramientas que logren un aprendizaje significativo y el logro de los objetivos de aprendizaje en los estudiantes y, a la vez, que se proyecten en alcanzar este mismo aprendizaje en sus alumnos. En este sentido, los libros escolares didácticos son una de las herramientas que permitirán fortalecer el acompañamiento en la modalidad a distancia.

Así las cosas, se presenta este texto para la asignatura de matemáticas. Un libro que muestra las temáticas propuestas en el plan de estudios de una forma lúdica, creativa y didáctica, para que despierte en el educando una manera diferente de ver la matemática, con sencillez y a la vez en forma clara y con ejercicios bien explicados, con el paso a paso, que es tan necesario en el aprendizaje de la matemática. De igual manera, se presentan situaciones problema de aplicación al contexto donde el estudiante podrá fortalecer esta competencia especifica: el planteamiento y resolución de problemas; así mismo, se presentan cuestionarios de preparación a las pruebas Saber Pro que el Estado realiza a los estudiantes a través del ICFES.

En el texto, el lector encontrará lo correspondiente a la matemática básica, con el fin de dar cumplimiento al desarrollo de los objetivos trazados en el proyecto de investigación. Así, a lo largo del texto se trabaja las siguientes temáticas: teoría de los números, proporcionalidad, matemática financiera y estadística básica. Estos contenidos se incluyeron para preparar a los estudiantes en los conocimientos básicos del área y potenciar los tipos de pensamientos matemáticos, como lo refiere el Ministerio de Educación Nacional (2006) en Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas:

> la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales, nacionales, regionales y locales como las relacionadas, una matemática para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de un ser humano con las competencias para el ejercicio de sus deberes y derechos democráticos. (p. 46)

De igual manera, los derechos básicos en las matrices de referencia le permite a un establecimiento educativo definir acciones de aprendizaje relacionadas de manera directa con la evaluación; identificar conocimientos, capacidades y habilidades que se deben fortalecer en cada grupo de grados; reconocer relaciones entre aprendizajes y evidencias de aprendizaje para potenciar acciones didácticas y de mediación intencionadas, así como identificar categorías conceptuales por áreas y posibles rutas para el desarrollo de competencias, y orientar procesos de planeación, desarrollo y evaluación formativa. Este texto busca dar solución a los aspectos que se encontraron al realizar el análisis de las pruebas que los estudiantes presentan a nivel nacional y que miden el comportamiento de estos saberes; en dicho análisis se encontró dificultades de los educandos de las dos instituciones objeto de estudio.

Como ya se mencionó, el problema se identificó después de realizar el análisis de las pruebas Saber de los estudiantes de dos instituciones educativas, relacionado con el proyecto de investigación con código SGI 3403, otorgado por la DIN de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. En el proyecto se expone las fases trabajadas, cuyo resumen ejecutivo dice textualmente lo siguiente:

> El análisis está estructurado en cinco fases, en primer lugar, se realizará una búsqueda de recolección de bases de datos suministradas por las instituciones implicadas en la investigación. En segundo lugar, se hace un análisis de las bases de datos por cada una de las competencias matemáticas y así poder establecer un diagnóstico. En tercer lugar, se realizará el diseño y propuestas de mejora con herramientas didácticas para las instituciones objeto de estudio. En cuarto lugar, se llevará a cabo la implementación de la propuesta con su respectiva metodología de trabajo. Por último, se llevará a cabo la evaluación, ajuste y consolidación de la propuesta, mediante el análisis de las características conceptuales de los niveles de desempeño de cada una de las competencias matemáticas examinadas. Este análisis suscita el debate para que, en conjunto con la comunidad educativa, se formulen estrategias para la mejora continua de los resultados y, por ende, mejorar la calidad educativa en las instituciones en el área de matemáticas.

> [Cabe señalar que], las Pruebas Saber tienen aplicaciones periódicas en los grados quinto y noveno (para medir la calidad de los niveles de básica primaria y secundaria, respectivamente) y en el grado undécimo, antes llamada examen de Estado para el ingreso a la educación superior, la más antigua y utilizada por instituciones de educación superior (IES) del país como un criterio de selección de sus admitidos. Recientemente se aplica el examen Saber Pro (antes llamada ECAES) a estudiantes que están culminando el ciclo técnico, tecnológico o profesional, cuya finalidad es evaluar la calidad de la educación superior en Colombia. (Celis et al., 2012, p. 69)

Por lo tanto, se diseñó este material educativo para poder iniciar el proceso de mejoramiento de estas pruebas. El objetivo de estudio de la investigación se centró en identificar las dificultades persistentes de los estudiantes de educación básica, concretamente en el desarrollo de las competencias: comunicación matemática, modelación matemática, razonamiento lógico y resolución de problemas, así como también los pensamientos matemáticos de los estudiantes de dos instituciones educativas del departamento de Boyacá. La población objeto de estudio fueron 117 estudiantes de la educación básica de las dos instituciones educativas que presentaron dichas pruebas. Una vez se caracterizó el grupo, se evidenció que la mayoría de estudiantes pertenecía al sexo femenino en un 52 % del total, por encima del grupo de sexo masculino correspondiente al 48 %.

Capítulo 1.

Teoría de los números

Propósito

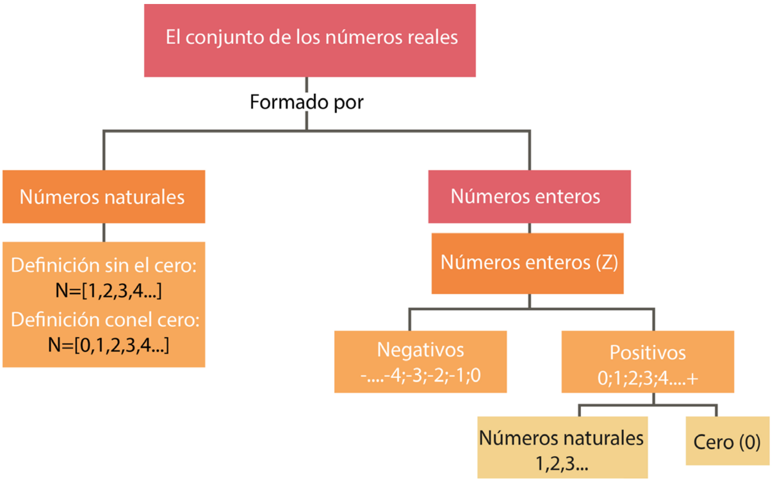
En esta primera unidad, se inicia con un proceso de fortalecimiento del aprendizaje de la matemática con el tema de sistemas numéricos en una línea lúdica, creativa y didáctica, buscando el desarrollo de las competencias específicas y el logro de los objetivos de aprendizaje con los diferentes grupos de números que se trabajan en la matemática, en este caso: números naturales, enteros, racionales y reales, importantes para una mejor comprensión de los procesos de la actividad matemática y para avanzar en el desarrollo de las habilidades matemáticas y conseguir un aprendizaje significativo.

Resumen

En esta unidad se dará a conocer cada uno de los conjuntos numéricos, a saber: números naturales, enteros, racionales y reales, los cuales se utilizarán para llevar a cabo diferentes actividades de matematización con operaciones de suma, resta, multiplicación y división; además, contarán con la respectiva explicación de ejercicios resueltos, así como la solución de situaciones problemas de aplicación del contexto de los estudiantes que requieren de la aplicación de estos conjuntos numéricos para un buen desarrollo de las competencias específicas de la matemática.

Figura 1

Mapa conceptual



Competencias

Comunicación: enuncia situaciones del contexto propias para la búsqueda de la solución de problemas relacionados con los conjuntos de números reales.

***Razonamiento*:** interpreta la relación y diferencia que existe entre cada conjunto de números que se trabaja en el área de matemáticas.

***Resolución de problemas**:* utiliza en forma adecuada los conjuntos de números para la solución de situaciones problema del contexto en el cual se encuentra el estudiante.

Aprendizajes

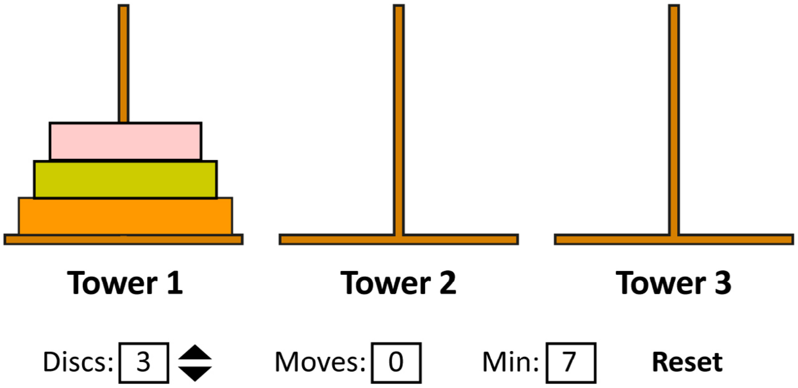
- Identificar los diferentes conjuntos numéricos y su utilización en situaciones problemas asociadas con actividades propias de la actividad matemática.
- Aplicar modelos y estrategias en la solución de problemas que requieran la utilización de los conjuntos numéricos.
- Utilizar la teoría de los números junto con estrategias y herramientas en la solución de problemas del contexto.

Saberes previos

Para fortalecer su pensamiento lógico y la enseñanza-aprendizaje de la matemática en una forma didáctica mediante el juego, solucione la actividad que se propone en la siguiente dirección, denominada **La Torre de Hanoi.**

Figura 2

Juego la Torre de Hanoi



Estructuración de saberes

Cómo solucionar un problema

Recuerde lo siguiente:

1. Interpretar el problema

Para lograrlo, debe leer con atención el problema en forma general y luego parte por parte. Se lee varias veces y se identifica la pregunta concreta, se saca los datos necesarios para determinar la estrategia más adecuada que lo lleve a la respuesta

2. Modelar la situación

Modelar es recurrir a las relaciones y operaciones matemáticas y gráficas para representar las situaciones que se plantean en el problema

3. Realizar lo modelado

Efectuar las operaciones matemáticas propuestas y verificar si respondió la pregunta planteada

4. Sustentar lo realizado

Justifique su respuesta con argumentos coherentes, de tal forma que se convenza y convenza a los demás, si hay más personas

Ejercicio

Si Pedro gasta $\frac{3}{4}$ de hora en recorrer una pista atlética y Mario gasta la mitad del tiempo que Pedro, ¿qué tiempo gasta Mario en recorrer la pista?

Solución

1. **Interpretación:** Después de leer el problema, se puede deducir los siguientes datos:

    a. Pedro utiliza $\frac{3}{4}$ de hora o 45 minutos.

    b. Mario utiliza la mitad del tiempo de Pedro, es decir, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$

    c. Se identifica a dónde se va a llegar, es decir, la pregunta.

2. **Formulación:** La operación indicada para buscar la solución es la **división**, entonces, tendremos:

$$\frac{3}{4} \div 2 \text{ o } 45 \div 2$$

3. **Realizar lo formulado**

$$\frac{3}{4} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \text{ de hora } \frac{45}{2} = 22{,}5 \text{ minutos.}$$

4. **Sustentar lo realizado**: La respuesta está acorde con el planteamiento, ya que, al decir que Mario utiliza la mitad de tiempo que utiliza Pedro, se está diciendo que se debe dividir tiempo de Pedro en dos partes y una de ellas corresponde al tiempo utilizado por Mario.

Números naturales

Definición

Los números naturales son el conjunto numérico que se utiliza en el diario vivir, es de gran utilidad para identificar cantidades

Se simboliza con la letra **N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10, 11, 12…}**

Ejemplo:

Tomemos los conjuntos D y L

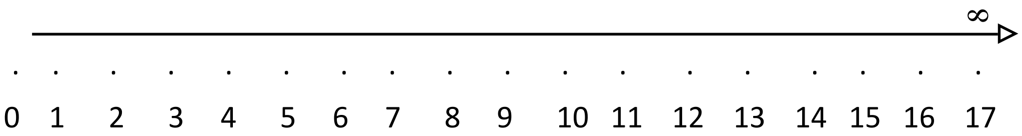
D = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

L = {a, e, i, o, u}

Se puede verificar que el conjunto **D** tiene **7** elementos y el conjunto **L** tiene **5** elementos, donde 7 y 5 son números naturales.

Representación gráfica

Es común que los números naturales se representen sobre puntos que guardan igual distancia en una semirrecta llamada numérica, así:



Operaciones con números naturales

Adición de números naturales

La adición de números naturales es el proceso donde se unen dos o más cantidades llamados **sumandos** para conformar otra cantidad llamada **suma**

Ejercicio solucionado

- Realizar la suma de los siguientes números naturales:

  a. 3 + 5 = 8
  b. 3 + 7 + 4 + 11 + 9 +2 + 5 = 42

Propiedades de la adición de números naturales. La suma de números naturales cumple con las siguientes propiedades:

Clausurativa. Si se suman dos números naturales se obtiene como resultado otro número natural. Por definición, si tenemos los elementos a, b y c, que pertenecen al conjunto de los naturales N, entonces, a + b = c

Ejemplo:

12 + 51 = 63

107 + 304 = 411

90 + 72 = 162

Conmutativa. Al sumar dos números naturales en cualquier orden, el resultado será el mismo. Por definición, si tenemos los elementos a, b y c, que pertenecen al conjunto de los naturales N, entonces, a + b = c y b + a = c

Ejemplo:

15 + 17 = 32 de igual forma 17 + 15 = 32

256 + 2 = 258 de igual forma 2 + 256 = 258

Asociativa. Tres sumandos se pueden organizar de diferente manera, el resultado siempre será el mismo. Por definición, si tenemos los elementos a, b, c y d, que hacen parte del conjunto de los naturales N, entonces, a + (b + c) = d y (a + b) + c = d

Ejemplo:

12 + (17 + 3)

12 + 20 = 32

Así mismo,

(12 + 17) + 3

29 + 3 = 32

Sustracción de números naturales

Realizar una resta de números naturales es quitar a un número grande un número más pequeño, con el fin de obtener un resultado, es decir, al minuendo se le quita el sustraendo para obtener un resultado denominado diferencia

Ejemplo

Sustraendo

43-12 = 31

Minuendo Diferencia

Ejercicio

Realizar la sustracción de los siguientes números naturales:

a. 65 – 25 =

Solución

a. 65 - 25 = 40

Multiplicación de números naturales

La multiplicación de dos números naturales, denominados factores, es realizar una suma abreviada, cuyo resultado se denomina producto

Recuerde lo siguiente:

La suma de los números naturales
3 + 3+ 3 + 3
es equivalente a la suma
4 + 4 +4,
es decir,
3 x 4 = 4 x 3
12 = 12

Ejercicio

- Realizar las siguientes multiplicaciones:

a. 2 . 4 =
b. 10 . 5 =

Solución

a. Como 2 x 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8 o 4 + 4 = 8 en suma abreviada. Entonces, 2 . 4 = 8

b. 10 x 5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10= 50 o 5 + 5 + 5 + 5 + 5 +5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 50 en suma abreviada. Entonces, 10 . 5 = 50

Propiedades de la multiplicación de números naturales. La multiplicación de números naturales cumple con las siguientes propiedades:

Clausurativa. Si se multiplica dos números naturales se obtiene como resultado otro número natural. Por definición, si tenemos los elementos a, b y c, que pertenecen al conjunto de los números naturales, entonces, a x b = c

Ejemplo:

3 . 5 = 15

2 . 7 = 14

Conmutativa. Si se multiplican dos números naturales en diferente orden, el producto será siempre el mismo. Por definición, si tenemos los elementos a, b y c, que pertenecen al conjunto de los números naturales, entonces, a . b = c y b . a = c

Ejemplo:

2 . 3 = 6 de igual manera 3 . 2 = 6

45 . 4 = 180 de igual manera 4 . 45 = 180

Asociativa. La forma como se ordenen los factores en una multiplicación no afecta el resultado. Por definición, si tenemos los elementos a, b, c y d, que pertenecen al conjunto de los números naturales, entonces, a . (b . c) = d y (a . b) . c = d

Ejemplo:

4 . (9 . 6)

4 . (54) = 216

Que es igual a:

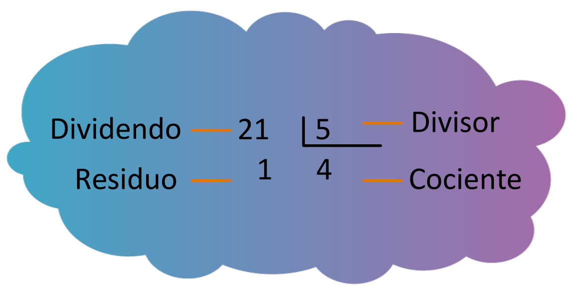
(4 . 9) . 6

(36) . 6 = 216

División de números naturales

Dividir dos números naturales es hallar la cantidad de veces que el divisor está en el dividendo, cuyo resultado se denomina cociente

Recuerde lo siguiente:



Ejercicio

- Realizar las siguientes divisiones de números naturales:

  a. $101 \div 5$

  b. $98 \div 2$

Solución

a. **Procedimiento**

Se ubica el dividendo y el divisor para calcular el cociente y residuo.

$$\begin{array}{r|l} 101 & 5 \\ \hline 01 & 20 \\ 1 & \end{array}$$

En esta división, el dividendo es 101, el divisor es 5, el cociente es 20 y el residuo es 1.

b. **Procedimiento**

```
98 |2
   ‾‾‾‾‾
18  49
 0
```

En esta división, el dividendo es 98, el divisor es 2, el cociente es 49 y no tiene residuo.

Ser divisible de

Si tenemos los números naturales **x** y **z**, se puede afirmar que **x** es un divisor de **z** o que **x** divide a **z**; si hay otro número natural **y**, entonces, **x** = **y** . **z**

Ejercicio solucionado

En la multiplicación 11 . 5 = 55, afirmamos que, 11 y 5 son factores del producto 55. Se puede concluir que, 11 y 5 son divisores de 55 porque 55 ÷ 11 = 5 y 55 ÷ 5 = 11

Múltiplo de un número

Cuando tenemos un número natural **d** y es divisor de un número natural **n**, entonces, se puede afirmar que **n** es un múltiplo de **d**

Ejercicio solucionado

- Si tenemos los números naturales 6 y 12, se puede decir que, 6 es divisor de 12, por consiguiente, 12 es múltiplo de 6.

- Si tenemos los números naturales 5 y 35, se puede decir que, 5 es divisor de 35, por consiguiente, 35 es un múltiplo de 5.

Recuerde lo siguiente:

Si dividimos $0 \div c = 0$ y c pertenece a los números naturales, lo anterior se cumple si c es diferente a 0

Todo número natural dividido entre 0 ($f \div 0$) no se puede realizar; se dice que es una indeterminación

Potenciación de números naturales

La potenciación de números naturales consiste en realizar una multiplicación en forma más rápida o abreviada. Se la puede definir así: $Z . Z . Z . Z . Z ... = Z^n$

En la potenciación, los términos que se utilizan son los siguientes:

Exponente

Base —— $Z^n = P$ —— Potencia

Recuerde lo siguiente:

Si tenemos la expresión Z^2, se dice que, es la segunda potencia de Z y se lee Z elevado al cuadrado

Si tenemos la expresión Z^3, se dice que, es la tercera potencia de Z y se lee Z elevado al cubo

Ejercicio

Calcular el valor numérico de las siguientes potencias:

a. 3^4

b. 9^5

Solución

a. $3^4 = 3.\ 3.\ 3.\ 3. = 81$ entonces 3^4 **= 81**

b. $9^5 = 9.\ 9.\ 9.\ 9.\ 9 = 59.049$ entonces 9^5 **= 59.049**

Propiedades de la potenciación. La potenciación de números naturales cumple con las siguientes propiedades:

***Producto de potencias iguales*.** Si tenemos los números naturales **b**, **x**, **z** y **n**, entonces se cumple: $b^x \, . \, b^z \, . \, b^n = b^{x+z+n}$

Ejemplo:

Solucionar el producto de las siguientes potencias: 4^2 **.** 4^3 **.** 4

Solución:

$$4^2 \, . \, 4^3 \, . \, 4 = 4^{2+3+1} = 4^6 = 4.096$$

***Potencia de una potencia*.** Si tenemos los números naturales **b, x** y **z**, entonces se cumple: $[\boldsymbol{b}^x]^z = \boldsymbol{b}^{x.z}$

Ejemplo:

- Solucionar la siguiente potencia $[3^2]^4$

Solución

$$[3^2]^4 = 3^{2.4} = 3^8 = 6.561$$

Cociente de potencias de igual base: Si tenemos los números naturales **b, x** y **z**, entonces se cumple: $\frac{b^x}{b^z} = b^{x-z}$ con **x** mayor que **z**

Ejemplo:

Solucionar el siguiente cociente de potencias de igual base $\frac{10^7}{10^5}$

Solución:

$$\frac{10^7}{10^5} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

Potencia con exponente negativo: Si tenemos los números naturales **b** y **z**, entonces se cumple: $b^{-z} = \frac{1}{b^z}$

Ejemplo:

Solucionar la siguiente potencia con exponente negativo 7^{-2}

Solución: $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

Números enteros

Definición

El conjunto de los números enteros se identifica por el símbolo Z y está conformado por la unión del conjunto de los números naturales, sus opuestos y el cero

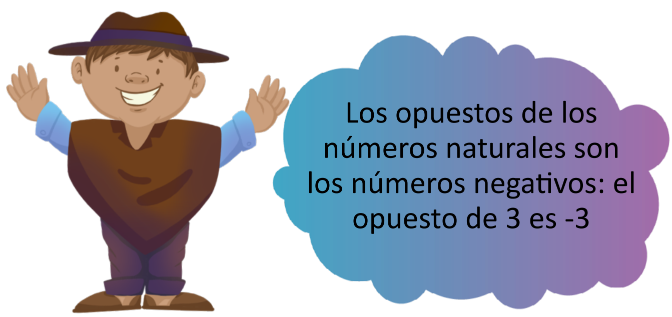
Este conjunto se simboliza de la siguiente forma:

$$Z = \{-\infty \ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \infty\}$$

En conclusión:

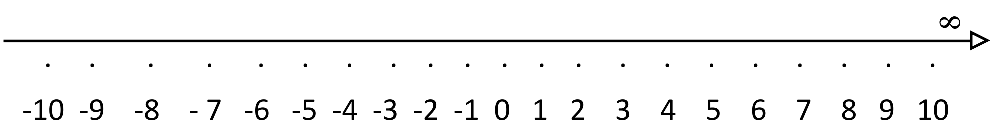
$$Z = Z^{-} \cup (0) \cup Z^{+}$$

Recuerde lo siguiente:



Representación gráfica de los números enteros

La representación gráfica de los números enteros se realiza mediante la utilización de la recta numérica, así:



Valor absoluto de un número entero

Calcular el valor absoluto de un numero entero consiste en identificar la distancia que existe entre un término con respecto a cero (0); se representa con dos barras $|b|$

Ejercicio solucionado

Calcular el valor absoluto o distancia con respeto al (0) de los siguientes valores:

$|4| = 4$ se lee así: valor absoluto de 4 es igual a 4

$|-10| = 10$, se lee así: distancia de (-10) con respecto al (0) es igual a 10.

Operaciones con números enteros

Adición de enteros

Suma de enteros con igual signo

Para realizar la adición de números enteros de igual signo, se toman los valores absolutos de cada uno de los sumandos y al resultado se le coloca el signo que tienen estos números enteros del ejercicio propuesto

Ejercicio

Sumar los siguientes números enteros que tienen igual signo y es positivo:

106 + 32=

Solución

a. 106 + 32 = 138

Procedimiento:

1. Se halla el valor absoluto de cada número, así se obtiene:

$$|106| = 106$$

$$|32| = 32$$

2. Se plantea la suma de los resultados de los valores absolutos:

$$106 + 32 =$$

3. Se realiza la suma planteada en el numeral anterior, obteniendo como resultado:

$$106 + 32 = 138$$

4. Se identifica el signo que tienen los sumandos que conforman la adición, en este caso, como es igual y es positivo, se lo coloca al resultado:

$$106 + 32 = +138 \text{ o } 106 + 32 = 138$$

5. La respuesta del ejercicio es la siguiente:

$$106 + 32 = 138$$

b. Realizar la siguiente suma de números enteros negativos:

$$(-24) + (-4) + (-78)$$

Procedimiento:

1. Se calcula el valor absoluto de cada uno de los números enteros que hacen parte de la suma (sumandos):

$$|-24| = 24$$

$$|-4| = 4$$

$$|-78| = 78$$

2. Se plantea la suma de los resultados de hallar el valor absoluto de cada sumando:

$$24 + 4 + 78 =$$

3. Se realiza la suma planteada en el numeral anterior, obteniendo el siguiente resultado:

$$24 + 4 + 78 = 106$$

4. Se coloca la adición inicial y se identifica el signo que tienen los sumandos que conforman la adición, en este caso, el signo es negativo en todos los sumando, por lo tanto, el resultado es negativo:

$$(-24) + (-4) + (-78) = -106$$

5. El resultado final de la adición de números enteros negativos es el siguiente:

$$(-24) + (-4) + (-78) = -106$$

Problema de aplicación en contexto

Tomando como base los datos suministrados por el Instituto Nacional de Salud (INS), relacionados con el total de contagios de COVID-19 presentados al día 31 de octubre de 2020 en las 4 ciudades más importantes del departamento de Boyacá, donde se mostró los siguientes resultados: Tunja 4.492, Sogamoso 2.941, Duitama 2.212 y Chiquinquirá 627. A partir de esta información, se plantea el siguiente interrogante: ¿Cuántos contagios se presentan en total en las 4 ciudades más importantes del departamento de Boyacá?

Solución

Para la solución de este problema de aplicación, se sigue los pasos planteados en el inicio de esta unidad:

1. **Interpretación:** Después de leer el problema, se obtienen los siguientes datos:

a. Número de contagios en las 4 ciudades: Tunja 4.492, Sogamoso 2.941, Duitama 2.212 y Chiquinquirá 627

b. Se identifica a dónde se va a llegar, es decir, la pregunta que se va a responder.

2. **Formulación:** Las operaciones que se deben realizar son las siguientes:

a. Primero, se identifica qué operación se debe realizar, en este caso, se realiza una **suma** de las cantidades para lograr el total.

$$4.492 + 2.941 + 2.212 + 627 =$$

3. **Realizar lo formulado**

a. Se encuentra el valor absoluto de cada número, de lo cual se obtiene:

$$|4.492| = 4.492$$

$$|2.941| = 2.941$$

$$|2.212| = 2.212$$

$$|627| = 627$$

b. Se realiza la suma de los resultados del cálculo de los valores absolutos de cada uno de los números:

$$4.492+2.941 + 2.212 + 627 =$$

c. Se calcula el resultado:

$$4.492+2.941 + 2.212 + 627 = 10.272$$

d. Se verifica el signo común y se lo coloca al resultado, en este caso, el signo común es positivo, entonces, el resultado final es positivo:

$$4.492+2.941 + 2.212 + 627 = 10.272$$

4. **Sustentar lo realizado**: De acuerdo con el procedimiento realizado, se puede concluir que, el total de contagiados por el virus COVID-19, en las 4 ciudades más importantes del departamento de Boyacá, fue de 10.272 personas.

Suma de enteros con diferente signo

Para realizar la suma de números enteros con diferente signo, se efectúa la sustracción del número que tenga menor valor absoluto del número que tenga mayor valor absoluto. El resultado lleva el signo del número que tenga mayor valor absoluto

Ejercicio

- Realizar la suma de los siguientes números enteros:

$$(17) + (-23)$$

Solución

Procedimiento a seguir:

1. Se calcula el valor absoluto de cada uno de los sumandos de la adición propuesta:

$$|17| = 7$$
$$|-23| = 23$$

2. Se plantea la resta, según la definición, del número con mayor valor absoluto le restamos el número con menor valor absoluto:

$$23 - 17$$

3. Se calcula el resultado de la sustracción:

$$23 - 17 = 6$$

4. Se identifica el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto, en esta caso, el signo es negativo:

$$|-23| = 23$$

5. Al resultado que es (6), se le antepone el signo negativo (-6), por el numero entero (-23), por consiguiente, la respuesta del ejercicio es la siguiente:

$$(17) + (-23) = -6$$

Ejercicio

Realizar la suma de los siguientes números enteros:

$$(34) + (-15) + (-9) + (22)$$

Solución

Procedimiento a seguir

1. Se realiza el procedimiento descrito en el ejercicio anterior, entonces, se suma de dos en dos sumandos, así:

$$(34) + (-15) + (-9) + (22) =$$

$$[(34) + (-15)] + (-9) + (22) =$$

$$[(19) + (-9)] + (22) =$$

$$(10) + (22) = 32$$

Problema de aplicación en contexto

La matemática financiera es importante para lograr un manejo adecuado de las finanzas personales. En la siguiente situación se pone en práctica la utilización de los números enteros en la vida financiera:

Una estudiante de la UPTC hizo dos compras con su tarjeta de crédito: una por \$ 355.000 y la otra por \$ 173.400. Antes de realizar estas compras tenía un saldo a favor de \$ 345.000, y antes había abonado a la tarjeta \$100.000. ¿Qué saldo tiene después del abono?

Solución

Para la solución de este problema de aplicación, se realizan los pasos planteados al iniciar esta unidad:

1. **Interpretación:** Después de leer el problema, se obtiene los siguientes datos:

a. La estudiante realizó 2 compras, una por un valor de \$ 355.000 y otra por \$ 173.400

b. Tenía un capital de \$ 345.000

c. Realizo un abono a la tarjeta de \$ 100.000

d. Se identifica una pregunta para solucionar.

e. Las compras con tarjeta de crédito se colocan con signo menos, pues ya no están dentro del saldo que tenía en la tarjeta de crédito.

2. **Formulación:** Se plantea la situación analizada en forma numérica; se da a conocer las operaciones que se deben ejecutar:

$$(345.000) + (-355.000) + (-173.000) + (100.000) =$$

3. **Realizar lo formulado:** Se realiza la operación planteada, que corresponde a una suma de números enteros con diferente signo:

$$[(345.000) + (-355.000)] + (-173.000) + (100.000) =$$

$$[(-10.000) + (-173.000)] + (100.000) =$$

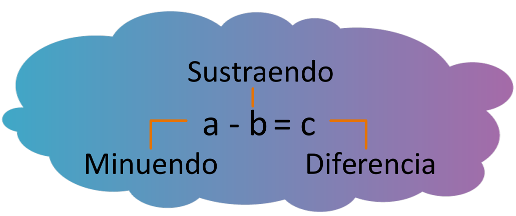
$$[(-183.000) + (100.000)] = -83.000$$

4. **Sustentar lo realizado**: De acuerdo con el procedimiento realizado, el resultado es negativo (-83.000), entonces, la estudiante de la UPTC, que realizó las 2 compras con la tarjeta de crédito, tiene un saldo en contra de \$83.000.

Resta de números enteros

La resta de números enteros se realiza utilizando dos términos llamados minuendo y sustraendo, de lo cual se obtiene un resultado denominado diferencia

Recuerde lo siguiente:



Ejercicio

Realizar la resta de los siguientes números enteros:

$$(-5) - (-7)$$

Solución

Procedimiento a seguir

1. Al primer término le sumamos el opuesto del segundo término, así:

$$(-5) + (7)$$

2. Para la suma de números enteros, se realiza el procedimiento de la adición de números enteros, así:

a. Se halla el valor absoluto

$$|-5| = 5$$
$$|7| = 7$$

b. Se resta del término que tiene mayor valor absoluto el término de menor valor absoluto, así:

$$7 - 5$$

c. Se realiza la sustracción y a la respuesta se le antepone el signo del número que alcanzó un mayor valor absoluto, en este caso, es positivo porque el signo del número con mayor valor absoluto, es decir, el 7 es positivo (+):

$$7 - 5 = 2$$

3. Luego, como resultado de la resta: (-5) - (-7), el resultado es el siguiente:

$$(-5) - (-7) = 2$$

Multiplicación de números enteros

Multiplicar números enteros significa adicionar en forma abreviada varios números enteros, ya sea de igual o diferente signo. Los términos de la multiplicación se llaman factores y el resultado producto

Recuerde lo siguiente:

Ley de los signos:

(+) × (+) = (+)

(-) × (-) = (+)

(+) × (-) = (-)

(-) × (+) = (-)

El resultado de la multiplicación de dos o más números enteros se obtiene al realizar el producto de los valores absolutos de los factores. El producto es positivo si los signos son iguales y negativo si son diferentes

Ejercicio

Realizar el producto de los siguientes números enteros:

a. 6 . (-5) =
b. (-12) . (-7) =
c. (3) . (-2) . 11 . 3 =

Solución

a. 6 x (-5) =

Procedimiento

1. Se realiza el producto de los valores absolutos de los términos:

$$|6| = 6$$

$$|-5| = 5$$

$$6 . 5 = 30$$

2. Se revisa el signo de cada uno de los factores y se aplica la ley de los signos, en este caso, se puede observar que el primero es positivo y el segundo negativo, entonces, según la ley de los signos **,** por lo tanto, el resultado es negativo.

$$6 . (-5) = -30$$

b. (-12) . (-7) =

Procedimiento

1. Se realiza la multiplicación de los valores absolutos de los números.

$$|-12| = 12$$

$$|-7| = 7$$

$$12 . 7 = 84$$

2. Se revisa el signo de los factores y se aplica la ley de los signos, en este caso, el signo que acompaña cada uno de los números es negativo, entonces, según la ley de los signos, (-) . (-) = (+), por lo tanto, el resultado es positivo.

$$(-12) . (-7) = +84$$

Problema de aplicación en contexto

Un estudiante de la LEB, se tiene que desplazar a la UPTC sede central ubicada en la ciudad de Tunja, el valor del transporte desde el municipio donde vive es de $ 13.500 de ida y $ 13.500 de vuelta. Si tiene que desplazarse 4 veces a la institución durante el mes, ¿Cuánto dinero gasta en transporte y cuánto dinero le queda para los demás gastos si su presupuesto es de $ 400.000 para el mes?

Solución

Para la solución de este problema de aplicación, se sigue los pasos planteados al inicio de esta unidad:

1. **Interpretación:** Después de leer el problema, se obtienen los siguientes datos:

   - ✓ El estudiante realiza 4 viajes en el mes.
   - ✓ Cada viaje tiene un valor de $ 13.500, es decir, $ 27.000 ida y vuelta.
   - ✓ Su presupuesto es de $ 400.000 para el mes.

2. **Formulación:** Se plantea la situación analizada en forma numérica, indicando las operaciones que se deben realizar, a saber: una multiplicación y una sustracción de números enteros:

   $$(27.000)\ .\ 4$$

   El resultado de esta multiplicación se lo resta a $ 400.000

3. **Realizar lo formulado:** Se realiza las operaciones planteadas, teniendo en cuenta que, la multiplicación de números enteros es con igual signo:

   - ✓ (27.000) . 4 = 108.000
   - ✓ 400.000 – 108.000 = 292.000

4. **Sustentar lo realizado**: De acuerdo con el procedimiento realizado, se puede concluir que, el estudiante de la LEB tiene una inversión en transporte de $ 108.000, por ende, para el resto de sus gastos, cuenta con $ 292.000.

División de números enteros

Para hallar el resultado de una división entre dos números enteros, se realiza la división del valor absoluto que se obtiene del dividendo entre el resultado del valor absoluto del divisor. El resultado o cociente es positivo si el dividendo y divisor tienen el mismo signo, y es negativo cuando tienen diferente signo (se aplica la ley de los signos)

Ejercicio

- Realizar las siguientes divisiones entre números enteros:
  a. (-45) ÷ (9)

Solución

Procedimiento

1. Se calcula el número que va a representar el valor absoluto del dividendo y divisor, de lo cual se obtiene el siguiente resultado:

$$| -45 | = 45$$
$$|9| = 9$$

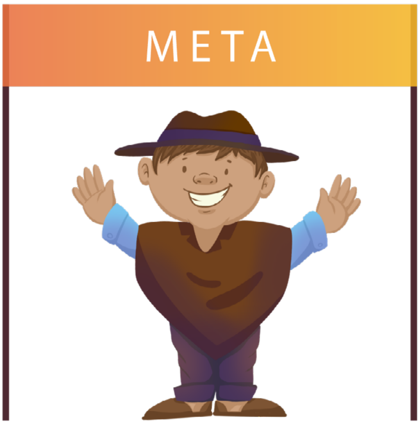
2. Se hace la división con los valores absolutos del dividendo y divisor:

$$45 \div 9 = 5$$

3. Como el dividendo y divisor tienen diferente signo, entonces, se aplica la ley de los signos (signos iguales signo positivo, signos diferentes signo negativo), por consiguiente, la respuesta a esta operación es negativa (-), así:

$$45 \div 9 = -5$$

Ejercicios de aplicación



Para fortalecer el perfeccionamiento de las competencias específicas de la matemática (comunicación, razonamiento y resolución de problemas) y así lograr los resultados de aprendizaje, realice los siguientes ejercicios:

1. En una construcción, la fachada de 31 m de ancho por 7 m de alto debe cubrirse con baldosas de 60 cm por 60 cm. Las baldosas vienen en cajas de 4 y el precio de cada caja es de $ 45.800. ¿Cuánto cuestan en total las baldosas que se necesitan para el trabajo?

2. Si se abre un grifo de agua, en 23 minutos se llenan 3/5 de un estanque. ¿Cuánto tiempo debe estar la llave abierta para que llene la totalidad del estanque?

3. La secretaria de una oficina de abogados se encuentra en el piso 29. Ella debe dirigirse a la Tesorería, para llegar a su destino toma el ascensor y baja 13 pisos, luego sube por las escaleras 3 pisos a la fotocopiadora y luego baja 10 pisos más por el ascensor. ¿En qué piso se encuentra la Tesorería?

Aprendizajes

- Utilizar el pensamiento lógico matemático para razonar y explorar las relaciones entre los números racionales y reales en situaciones propias de la vida cotidiana.

- Emplear diferentes modelos y estrategias didácticas en la solución de problemas que requieran el uso de los diferentes sistemas de numeración.

- Utilizar los sistemas de numeración y herramientas didácticas en la solución de problemas del contexto.

Números racionales

Definición

El conjunto de los números racionales se puede identificar como el cociente entre dos números enteros, siempre y cuando el denominador sea diferente a cero (0)

Recuerde lo siguiente:

En un número racional de la forma $\frac{a}{b}$, a representa el numerador e indica la cantidad que se toma de la unidad y b es el denominador e indica la cantidad de veces que se divide la unidad

Ejercicios

1. Escribir cada expresión como una razón

a. 4 es a 4

b. 7/3 es a 1/4

c. 2/5 es a 0,05

Solución

a. $\frac{4}{4}$

b. $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{4}}$

c. $\frac{\frac{2}{5}}{0{,}05}$

2. Expresa mediante una razón las siguientes situaciones:

Los estudiantes de una institución educativa tienen una salida pedagógica en la que pretenden acampar. El menú de la comida es espaguetis en salsa boloñesa, la cual viene en porciones individuales. Por cada 6 estudiantes se necesita un tarro de salsa. Si el grupo encargado de hacer las compras consigue una promoción de 2 tarros por $ 6.000. ¿Cuántos tarros de salsa deben comprar y cuánto constarán, si van 60, 72 o los 90 estudiantes de la institución educativa?

Tarros	N.º de estudiantes	Razón
	6	
	30	
	60	
	72	
	90	

N.º de tarros	Costo	Razón
2		
4		
10		
12		
20		

Solución

Tarros	N.º de estudiantes	Razón
1	6	1/6
5	30	5/30
10	60	10/60
12	72	12/72
15	90	15/90

Nº de tarros	Costo	Razón
2	$6.000	2/6.000
4	$12.000	4/12.000
10	$30.000	10/30.000
12	$36.000	12/36.000
20	$60.000	20/60.000

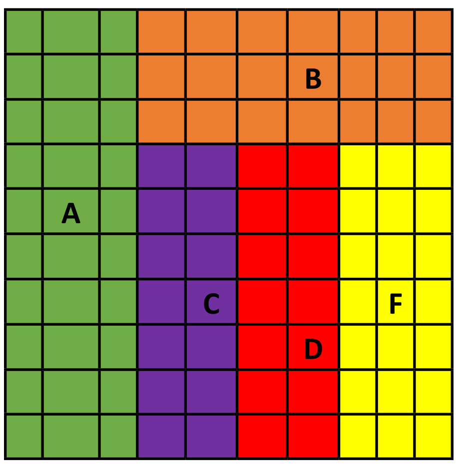
Representación decimal de los números racionales

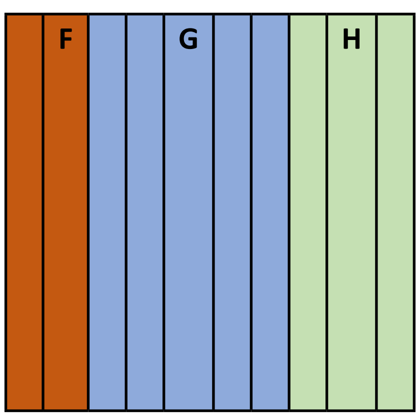
Representación decimal de los números racionales

Utilizando la representación decimal, todo número racional puede expresarse como un número decimal finito (exacto) o periódico y viceversa. De esta manera, el valor decimal de un número racional se obtiene al realizar la operación que indica el cociente entre el numerador y el denominador

Ejercicios

Dos lotes de 100 m^2 de área cada uno se han dividido en 8 sectores para sembrar diferentes plantas, como se muestra a continuación:





Entonces, se escribe el decimal correspondiente al área de cada sector y se determina cuales sectores tienen la misma área.

Solución

Las fracciones correspondientes a cada uno de los sectores en los que están divididos los dos lotes pueden escribirse en forma decimal, así:

Sector A: 0.30	**Sector B**: 0.21	**Sector C**: 0.14	**Sector D**: 0.15
Sector E: 0.20	**Sector F**: 0.2	**Sector G**: 0.5	**Sector H**: 0.3

Los sectores A y H tienen la misma área, por tanto, 0.30 es igual a 0.3, esto significa que, 30 centésimas equivalen a 3 décimas, en fracciones se escribe de la siguiente manera: 30/100 = 3/10.

El sector E y F son iguales.

Ejercicios propuestos

1. Escribe en forma de fracción y decimal cada parte del rectángulo:

    a. Parte morada.
    b. Parte azul.
    c. Parte verde.
    d. Parte roja.

2. Escribe en forma de fracción y de número decimal:

    a. Seis décimas.
    b. Catorce décimas.
    c. Diez décimas.
    d. Cuarenta y dos décimas.
    e. Tres centésimas.
    f. Doscientos cuarenta y tres centésimas.
    g. Cuarenta y ocho milésimas.

Orden de los números racionales

Orden de los números racionales

Los números racionales pueden representar cantidades, unos pueden representar más y otros menos, es decir, hay una relación de orden entre ellos. Entonces, se debe tener la capacidad de poder determinar cuándo un número fraccionario es mayor que otro

Ejercicios

Camilo y su padre salieron al mismo tiempo de su casa, Camilo va en su bicicleta al colegio, que queda a una distancia de 9 km, con una rapidez promedio de 15 Km/h. Su padre va en el carro a la oficina, que queda a una distancia de 50 Km, con una rapidez promedio de 60 Km/h. ¿Cuál de los dos llega primero a su destino?

Solución

1. Se expresa los tiempos de cada uno como fracciones y luego se los compara:

Camilo

$$\frac{9\ \text{Km}}{15\ \frac{\text{Km}}{\text{h}}} = \frac{9}{15}\ \text{de hora} = \frac{3}{5}\ \text{de hora}$$

Padre

$$\frac{50\ \text{Km}}{60\ \frac{\text{Km}}{\text{h}}} = \frac{5}{6}\ \text{de hora}$$

2. Para comparar las fracciones 3/5 y 5/6, se puede utilizar alguno de los siguientes métodos:

Método uno: Encontrar sus expresiones decimales equivalentes y compararlas: 3/5 hora = 0,6 de hora 5/6 hora = 0,83 de hora Como 0,6 < 0,83, se concluye que, 3/5 < 5/6	**Método dos:** Encontrar fracciones equivalentes con el mismo denominador y compararlas; se busca el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores, en este caso, es 30, entonces, se multiplica las fracciones para que tengan el denominador 30 y se las compara: $\frac{3}{5} = \frac{3\,.\,6}{5\,.\,6} = \frac{18}{30}$ $\frac{6}{6} = \frac{5\,.\,5}{6\,.\,5} = \frac{25}{30}$ Como 18/30 < 25/30, se concluye que, 3/5 < 5/6

Ejercicios propuestos

1. Escribe entre los dos racionales el símbolo >, < o =, según corresponda:

   a. $\frac{5}{6} \quad \frac{4}{7}$

   b. $\frac{-5}{6} \quad \frac{-4}{7}$

   c. 2,72 2,72

2. Ordena de menor a mayor cada grupo de racionales:

   a. $\frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$

   b. $\frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{-1}{2}$

   c. 3,48; 3,6; -0,02; -0,005

3. Resuelve la siguiente situación problema:

   Un docente pide a sus estudiantes que escriban un ejemplo de una fracción que se encuentre entre 1/2 y 3/4 y que expliquen la manera como la han encontrado.
   Andrés, estudiante sobresaliente en matemáticas, escribió 2/3 junto con la siguiente explicación: “busque un número entre 1 y 3, o sea, 2; después, un número entre 2 y 4, o sea, 3; luego escribí la fracción 2/3.

   Repite este procedimiento con otra fracción y determina si el método es válido siempre.

Operaciones con números racionales

Suma de números racionales

Suma de números racionales

Igual denominador (homogéneos)

Para solucionar operaciones de este tipo, se deja el denominador y se suman los numeradores entre sí.

Por definición: $\frac{m}{n} = \frac{x}{n} = \frac{m + x}{n}$

Diferente denominador (heterogéneos)

La solución adecuada para este modelo de sumas es hallar el mínimo común denominador, ya que sirve como denominador general; luego, se suman los numeradores, se verifica el cociente de cada denominador con respecto al MCD y se opera con cada numerador.

Por definición: $\frac{m}{n} = \frac{x}{y} = \frac{my + xn}{ny}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, d + b \,.\, c}{b \,.\, d}$$

Resta de números racionales

Resta de números racionales

Con igual denominador (homogéneos)

Para la solución de este tipo de operaciones, se deja el mismo denominador y se restan los numeradores.

Por definición: $\frac{m}{n} - \frac{x}{n} = \frac{m - x}{n}$

Diferente denominador (heterogéneos)

La solución correcta para este modelo de diferencia es hallar el mínimo común denominador, ya que sirve como denominador general; luego, se operan los numeradores, se verifica el cociente de cada denominador con respecto al MCD y se multiplica con cada numerador.

Por definición: $\frac{m}{n} - \frac{x}{y} = \frac{my - xn}{ny}$

Multiplicación de números racionales

Multiplicación de números racionales

Se multiplican numeradores y denominadores entre sí, se tiene en cuenta la tabla de signos, de lo cual se obtiene un nuevo número racional.

Tabla de signos:

+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Por definición:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{x}{y} = \frac{m \cdot x}{n \cdot y}$$

División de números racionales

División de números racionales

Dada la división entre dos números racionales, se deja estático el primer número racional y se invierte el segundo número; luego, se realiza el procedimiento utilizado para la multiplicación de números racionales.

Por definición:

$$\frac{m}{n} \div \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \cdot \frac{y}{x} = \frac{m \cdot y}{n \cdot x}$$

Para dividir los números racionales, se toma el numerador de la primera fracción y se lo multiplica por el denominador de la segunda fracción, el resultado será utilizado como numerador; después, se toma el denominador de la primera fracción y se lo multiplica por el numerador de la segunda fracción, a ese resultado se lo ubica como denominador. Por lo tanto, en el caso de la división, el orden de los cocientes sí altera el resultado. Es decir, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Ejercicios solucionados

1. Efectúe las siguientes operaciones con números racionales:

a. $\frac{5}{6} + \frac{-1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5(1) - 1(3) + 7(2)}{6} = \frac{5 - 3 + 14}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

b. $\frac{7}{8} + \frac{11}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7 + 11 - 5}{8} = \frac{13}{8}$

c. $\frac{3}{2} x \frac{-5}{4} x \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot (-5) \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{-90}{56} = \frac{-45}{28}$

d. $\frac{23}{11} \div \frac{-15}{9} = \frac{23 \cdot 9}{11.(-15)} = \frac{207}{-165} = \frac{-69}{55}$

2. Resuelva las siguientes situaciones relacionadas con números racionales:

   a. Carolina viaja en su bicicleta de la ciudad A hasta la ciudad B. Recorre el trayecto por tramos durante tres días. El lunes recorre 5/12 de la distancia total, el martes recorre 3/10 de la distancia total y el miércoles recorre la distancia que le queda. ¿Qué parte de la distancia recorrió el miércoles?

Solución

1. Primero, se debe encontrar qué parte de la distancia recorrió los dos primeros días

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{10} = \frac{(5 \,.\, 10) + (12 \,.\, 3)}{12 \,.\, 10} = \frac{50 + 36}{120} = \frac{86}{120} = \frac{43}{60}$$

2. Para saber la distancia que recorrió el miércoles, se toma la distancia total 1 y se resta el trayecto de los dos primeros días

$$1 - \frac{43}{60} = \frac{60 - 43}{60} = \frac{17}{60} \text{ distancia que recorrió el miércoles}$$

   b. Ana tiene un supermercado; ahí vende huevos empacados por docena. Uno de sus clientes le pide solamente 5/6 de docena ¿Cuántos huevos debe venderle Ana?

Solución

Una docena son doce unidades, y se requiere calcular 5/6 de la docena, para ello, se debe multiplicar los números 5/6 y 12. Para realizar esta multiplicación, primero, se debe ubicar el número 1 como denominador del número entero, es decir, del 12. Luego, se procede a multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{12}{1} = \frac{60}{6} = 10$$

Entonces, 5/6 de la docena corresponde a 10 huevos.

   c. Andrea compró en la tienda de víveres un queso doble crema que pesaba 6/8 de kilo. Si lo partió en porciones de 1/8 de kilo cada una ¿cuántas porciones de queso saco?

Solución

Se plantea la división de la siguiente manera:

$$\frac{6}{8} \div \frac{1}{8} = \frac{6\,.\,8}{8\,.\,1} = \frac{48}{8} = \text{6 porciones}$$

Ejercicios propuestos

1. Resuelva las siguientes operaciones con números racionales:

   a. $\frac{5}{13} + \frac{2}{26} - \frac{3}{2} =$

   b. $\frac{11}{4} - \frac{4}{7} + \frac{15}{6} =$

   c. $\frac{2}{9} \cdot \frac{13}{5} \div \frac{7}{9} =$

   d. $\frac{8}{3} \div \frac{7}{10} \cdot \frac{-3}{4} =$

2. Calcular el valor del término desconocido en cada una de las siguientes ecuaciones:

   a. $x + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

   b. $m - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

   c. $x + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

   d. $\frac{5}{6} + x = \frac{-2}{9}$

3. Resuelva las siguientes situaciones:

   a. Daniel y Juan José trabajan juntos cortando el césped del jardín de una casa. Daniel cortó el césped de los 5/12 del jardín y Juan José, los 2/5 del jardín. ¿Qué parte del jardín aún no se ha cortado el césped?

   b. Camila y Andrés son propietarios de una panadería; para hacer más galletas deben triplicar las cantidades de los ingredientes de la receta. Si la receta pide 3/4 de taza de mantequilla, 1 taza de azúcar, 1/2 taza de pepitas de chocolate y 27/8 de tazas de harina, ¿qué cantidad necesitan de cada uno de los ingredientes?

c. Un padre reparte entre sus hijos $3.600.000. Al mayor le hereda 4/9 de esa cantidad; al mediano, 1/3, y al menor, el restante. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

Potenciación y radicación de números racionales

Propiedades de la potenciación

Potenciación de números racionales

Potencias de igual base y diferente denominador

Se deja la misma base y se suman los exponentes, así:

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{n} + \left(\frac{c}{d}\right)^{m} = \left(\frac{c}{d}\right)^{n+m}$$

Potencias del producto de bases diferentes e igual exponente

Se realiza el producto de las bases y se deja el mismo exponente:

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{n} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{n} = \left(\frac{c}{d}\ \frac{x}{y}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a\ .\ c}{b\ \ \ d}\right)^{n}$$

Cociente de igual base y diferente exponente

Se deja la misma base y se restan los exponentes:

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{n} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{m} = \left(\frac{c}{d}\right)^{n-m}$$

Potencia de una potencia

Se deja la misma base y se multiplican los exponentes:

$$\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{n}\right]^{m} = \left[\frac{x}{y}\right]^{n.m}$$

Propiedades de la radicación

Radicación de números racionales

La radicación es una operación contraria a la potenciación, consiste en buscar un número que multiplicado tantas veces como indica el índice de la raíz de la cantidad subradical o radicando.

Propiedades:

1. **Raiz de un producto**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

2. **Raiz de un cociente**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3. **Raiz de una potencia**

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

4. **Raiz de una raiz**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m.n]{\frac{a}{b}}$$

Ejercicios

1. Simplifique y exprese el resultado sin usar exponentes:

a. $\left(\frac{-3}{7}\right)^2 = \frac{(-3)\,.\,(-3)}{7\,.\,7} = \frac{9}{49}$

b. $\left(\frac{-1}{5}\right)^5 = \frac{(-1)\,.\,(-1)\,.\,(-1)\,.\,(-1)\,.\,(-1)}{7\,.\,7\,.\,7\,.\,7\,.\,7} = \frac{-1}{16.807}$

c. $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^6} = \frac{1}{\frac{1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\,.\,1}{10\,.\,10\,.\,10\,.\,10\,.\,10\,.\,10}} = \frac{1}{\frac{1}{1.000.000}} = 1.000.000$

2. Escriba expresiones en forma de radical a partir de las siguientes potencias:

   a. $(0.7)^2 = 0{,}49$ $\sqrt{0.49} = 0{,}7$, ya que el exponente pasa a ser el índice del radical, la base pasa a ser la raíz, y la potencia pasa a ser la cantidad subradical.

   b. $(0{,}2)^5 = 0{,}00032$ $\sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$ ya que el exponente pasa a ser el índice del radical, la base pasa a ser la raíz, y la potencia pasa a ser la cantidad subradical.

3. Simplifique los siguientes radicales:

   a. $\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} = \frac{-4}{5}$ ya que $\frac{-4\ .\ -4\ .\ -4}{5\ .\ 5\ .\ 5} = \frac{-64}{125}$

   b. $\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{12}{25}} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

4. Resuelva las siguientes situaciones problema del contexto:

   a. La propietaria de una papelería adquiere un número de esferos por $ 196.000. Si se sabe que el valor de un esfero es igual al número de elementos. ¿Qué valor tiene cada esfero?

Solución

1. Sea "p" el valor del esfero.
2. Sea "n" el número de esferos.
3. El producto del valor de un esfero por el número o cantidad de esferos se obtiene el valor total , por consiguiente, $ 196.000 = *p . n*
4. El enunciado dice que el precio del esfero coincide con el número de esferos, por lo tanto, p = n
5. Luego, 196.000 = *p . p*
6. $196.000 = p^2$ $p=\sqrt{196.000} =$

$433 es el precio de cada esfero y 443 es el número de boligrafos

   b. Javier tiene una cinta de la bandera de Colombia de 12 m de longitud. Cada vez que uno de sus compañeros le pide un pedazo, él le regala la mitad de la cinta que tiene. ¿Qué parte de la cinta le regala al cuarto amigo? ¿Cuál es la medida de la cinta que le regala?

Solución

Al primer amigo le regala $12 \cdot \frac{1}{2} = \frac{12}{2} = 6\ m$ al segundo amigo, $6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3\ m$;

al tercer amigo, $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ m$ al cuarto amigo, $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75\ m$

Ejercicios propuestos

1. Simplifique y exprese el resultado de las siguientes expresiones sin usar exponentes:

   a. $\left(\frac{-9}{14}\right)^2 =$

   b. $\left(\frac{-2}{10}\right)^5 =$

   c. $\left(\left(\frac{2}{20}\right)^{-4}\right)^6 =$

2. Escriba expresiones con potencias a partir de las siguientes expresiones radicales:

   a. $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}} = \frac{-2}{3}$

   b. $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$

   c. $\sqrt[9]{1} = 1$

   d. $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$

3. Simplifica los siguientes radicales:

   a. $\sqrt[3]{\frac{1}{8} \div \frac{27}{64}} =$

   b. $\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^4 =$

4. Resuelva las siguientes situaciones problema:

   a. Un escarabajo recorre 1/6 de un camino en un día. Al siguiente día recorre 1/6 de lo que hizo el día anterior y así sucesivamente. ¿Qué distancia ha recorrido al sexto día? ¿Cuál es la distancia total recorrida al finalizar el sexto día?

Números reales

Definición

Números reales

Los números reales son cualquier número que corresponda a un punto en la recta real; pueden clasificarse en números naturales, enteros, racionales e irracionales. En otras palabras, cualquier número real está comprendido entre menos infinito y más infinito. Se los puede representar en la recta real

Dominio de los números reales

Dominio de los números reales

Los números reales son los valores comprendidos entre los extremos infinitos. Es decir, no se incluirá los infinitos en el conjunto.

$$\mathbb{R} \in (-\infty, +\infty)$$

Dominio de los números reales

Números reales en la recta real

Esta recta recibe el nombre de **recta real**, dado que se puede representar en ella todos los números reales

$-\infty$ $\mathbb{R}$ $+\infty$

Linea real

Clasificación de los números reales

Clasificación de los números reales

Números naturales. Es el primer conjunto que aprendemos. Este conjunto no tiene en cuenta el número cero (0), excepto que se especifique lo contrario (cero neutral).

Números enteros. Están conformados por los números naturales y sus opuestos.

Números racionales. Corresponden a las fracciones que se forman al colocar como numerador y denominador números enteros. Se entiende las fracciones como cocientes de números enteros.

Números irracionales. Están compuestos por el conjunto de los números decimales que no pueden expresarse ni de manera exacta ni de manera periódica.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes situaciones matemáticas relacionadas con la clasificación de números reales.

   Complete la siguiente tabla con la información suministrada:

Nombre	Edad en el año 1979	Edad en el año 2003	Edad en el año 2020
Carlos		65	
Carmen			52
Luis	12		
Andrés		27	
Sara	8		
Tania			45

Solución

Nombre	Edad en el año 1979	Edad en el año 2003	Edad en el año 2020
Carlos	41	65	82
Carmen	11	35	52
Luis	12	36	53
Andrés	3	27	44
Sara	8	32	49
Tania		28	45

A continuación, se muestran las operaciones realizadas para completar la tabla:

2003-1979= 24	65-24=41	2003-1979=24	24+12=36	2003-1979= 24	8+24=32
2020-2003= 17	65+17=82	2020-2003=17	36+17=53	2020-2003= 17	32+17=49
2020-2003 =17	52-17=35	2003- 1979=24	27-24= 3	2020-2003= 17	45-17= 28
2003-1979=24	35-24=11	2020-2003= 17	27 +17= 44	2003-1979=24	28-24= 4

2. Un tanque de agua presenta una avería y produce una fuga de 4l cada 90 minutos. Calcule cuánta agua pierde en cada lapso de tiempo. Usa el signo menos para indicarlo.

   a. 3 horas
   b. 12 horas
   c. 24 horas
   d. Si la capacidad del tanque es de 120 L. ¿En qué periodo de tiempo queda vacío el estanque?

Solución

Como 60 minutos equivalen a 1 hora, entonces:

Tiempo	Capacidad (L)
90 min	4
180 min	x

$$X = \frac{180 \cdot 4}{90} = \frac{720}{90} = 8 \text{ L}$$

En 12 horas, es decir, 720 minutos:

Tiempo	Capacidad (L)
90 min	4
720 min	x

$$X = \frac{720 \,.\, 4}{90} = \frac{2.880}{90} = 32 \text{ L}$$

En 24 horas, es decir, 1.440 minutos:

Tiempo	Capacidad (L)
90 min	4
1.440 min	x

$$X = \frac{1.440 \,.\, 4}{90} = \frac{5.760}{90} = 64 \text{ L}$$

Si la capacidad es de 120 l, entonces, se realiza la operación y se compara el tiempo con los litros de agua, así:

Tiempo	Capacidad (L)
90 min	4
x	120

$$X = \frac{120 \,.\, 90}{4} = \frac{10.800}{4} = 2.700 \text{ min}$$

Para una mejor comprensión, se realiza la conversión a horas, para ello, se divide 2.700 minutos entre 60 minutos, que equivale a una hora, así:

$$X = \frac{2.700}{60} = 45$$

Entonces, se pude decir que, en 45 horas se desocupa el tanque.

3. Según la información brindada por un nutricionista, de una determinada cantidad de leche se obtienen aproximadamente 4/25 de su peso en crema. A su vez, de la crema se obtienen 8/25 de su peso en mantequilla. Un litro de leche pesa aproximadamente 1.000 gramos.

   a. ¿Qué cantidad de crema se puede obtener con 1.000 litros de leche?

   b. ¿Qué cantidad de mantequilla se puede obtener con esa misma cantidad de leche?

Solución

1 litro = 1.000 gramos   1.000 litros = 1.000.000 gramos

Entonces:

$$\frac{4}{25} \text{ X } 1.000.000 = \frac{4.000.000}{25} = 160.000 \text{ gramos de crema}$$

$$\frac{8}{25} \text{ X } 160.000 = \frac{1.280.000}{25} = 51.200 \text{ gramos de mantequilla}$$

Ejercicios propuestos

1. A continuación, se presenta el número aproximado de habitantes de cuatro departamentos de Colombia:

Departamento	**Habitantes**
Antioquia	5.561.000
Atlántico	2.370.753
Boyacá	1.375.064
Cundinamarca	2.340.510

Averiguar donde vive Carla, Samuel, María, Carlos si se sabe lo siguiente:

- Carla vive en el departamento que tiene 3.190.247 habitantes menos que Antioquía.

- Samuel vive en el departamento que tiene 965.446 habitantes más que Boyacá.

- María vive en el departamento que tiene más habitantes.

- Carlos vive en el departamento que tiene 995.689 habitantes menos que Atlántico.

2. A Leonardo le gusta bucear, y quiere registrar con su cámara de video un complejo coralino que se encuentra 60 m bajo la superficie del agua. Si Leonardo llega a los corales en 15 minutos en promedio, ¿cuántos metros descendió por minuto?

3. En un colegio de la ciudad de Tunja, hay 1.200 estudiantes, 1/15 están es sexto grado. Si 3/8 del total de estudiantes de sexto conforman un grupo de teatro:

- ¿Cuántos estudiantes son de sexto grado?

- ¿Cuántos estudiantes conforman el grupo de teatro?

- ¿Qué fracción del total de estudiantes del colegio representa el grupo de teatro?

Operaciones con números reales

Suma de números reales. De la suma de dos números reales se obtiene un número real. Por definición, si se tiene los elementos **z**, **b y m,** que hacen parte del conjunto de los números reales, entonces, se expresa de la siguiente forma:

$$z, b, m \in \mathbb{R}$$

Luego, de la suma se obtiene como resultado otro número real.

$$z + b = m$$

Diferencia de números reales. Si se tiene los números reales z y b, se puede decir que, la diferencia entre estos dos números es igual a la adición del minuendo con el opuesto del sustraendo.

$$z - b = z + (-b)$$

Producto de números reales. El producto de dos números reales se obtiene al operar dos números reales**.**

$$a . b \in \mathbb{R}$$

División de números reales. La división de dos números reales se define como el producto del dividendo por el inverso del divisor.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla:

Número	**Conjunto numérico**
$\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{36}$	
2,25111	
$\sqrt{-5}$	
$\frac{75}{-5}$	

Solución

Número	**Conjunto numérico**
$\frac{\pi}{2}$	Irracional
$\sqrt{36}$	Natural
2,25111…	Irracional
$\sqrt{-5}$	Imaginario
$\frac{75}{-5}$	Racional

2. Resuelva los siguientes ejercicios:

a. $\left(\frac{1}{6} \div \frac{2}{7}\right) \div \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1\ .\ 7}{2\ .\ 6}\right) \div \frac{1}{2} \qquad \frac{7}{12} \div \frac{1}{2} = \frac{7\ .\ 2}{12\ .\ 1} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

b. $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} + \left(\frac{1\ .\ 3 + 2\ .\ 1}{2\ .\ 3}\right) = \frac{3}{4} + \left(\frac{3+2}{6}\right) = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$

$$\frac{3\ .\ 6 + 4\ .\ 5}{4\ .\ 6} = \frac{18 + 20}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$$

c. $\left(\frac{12}{7}+\frac{1}{4}\right)-1\frac{1}{3} = \left(\frac{12\,.\,4+7\,.\,1}{7\,.\,4}\right)-1\frac{1}{3} = \left(\frac{48+7}{28}\right)-\frac{4}{3} = \frac{55}{28}-\frac{4}{3}$

d. $\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3+5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{8}$

e. $\sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5}$

f. $\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{7}{9}$

3. Resuelva las siguientes situaciones problema:

 a. Un grupo de amigos participó en una carrera de automóviles. El vehículo de Javier consumió 15,2 galones de combustible; el carro de Daniel, 13,23 galones; el carro de Juancho, 23,54 galones, y el carro de Omar, 9,87 galones de gasolina. Al llegar a la meta, se evidenció que el orden de llegada de los vehículos está en concordancia con la cantidad de combustible utilizado, si lo ordenamos de mayor a menor. Casualmente el orden de llegada de los cuatro amigos corresponde a la cantidad de gasolina empleada, ordenada de mayor a menor.

 - ¿Quién ocupó el primer puesto?
 - ¿Quién ocupó la última posición?

Solución

Juancho	23,54 galones	Daniel	13,23 galones
Javier	15,20 galones	Omar	9,87 galones

- ¿Quién llegó en primer lugar? **Juancho**
- ¿Quién llegó en el último lugar? **Omar**

b. La metodología empleada por un maestro para calificar un examen de 30 preguntas consiste en una puntuación de 6 a cada respuesta acertada y -3 cada respuesta no acertada. Las preguntas no contestadas no tienen puntaje. Completar la siguiente tabla:

Preguntas			
Acertadas	**No. acertadas**	**Sin contestar**	**Nota final**
12	15	3	27
10	13	7	21
8	20	2	-12
29	1	0	171
24	5	1	129
5	20	5	-30
12	16	2	24

Solución

12 . 6=72 15 . (-3) = -45 72 - 45= 27 10 . 6= 60 13 . (-3) =-39 60 – 39 = 21

8 . 6 = 48 20 . (-3) =-60 48 – 60 =-12 29 . 6 = 174 1 . (-3) =-3 174 – 3 = 171

24 . 6 = 144 5 . (-3) =-15 144 – 15 = 129 5 . 6 = 30 20 . (-3) =-60 30 – 60 =-30

12 . 6 = 72 16 . (-3) =- 48 72 – 48 = 24

Ejercicios propuestos

1. Completa la siguiente tabla:

Número	Conjunto numérico
$\sqrt[3]{-27}$	
3π	
$\sqrt[3]{81}$	
7,333..	
$\frac{-45}{7}$	

2. Resuelva los siguientes ejercicios:

a. $\left(\frac{3}{7} \div \frac{4}{3}\right) \div \frac{5}{2} =$

b. $\frac{8}{3} + \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{3}\right) =$

c. $\left(\frac{12}{7} + \frac{1}{4}\right) + 3\ \frac{1}{4} =$

d. $\left(\frac{11}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 =$

e. $\sqrt{\frac{81}{16}} =$

f. $\sqrt[3]{\frac{125}{216}} =$

3. Resuelva las siguientes situaciones problema:

a. Por información médica se sabe que una vacuna tiene 100.000.000 bacterias por centímetro cúbico. ¿Cuántas bacterias habrá en una caja de 240 ampollas de 40 milímetros cúbicos cada una?

b. Algunos animales son capaces de desarrollar grandes velocidades para perseguir presas o escapar de los predadores. Otros llevan una vida más relajada. Observa las siguientes velocidades:

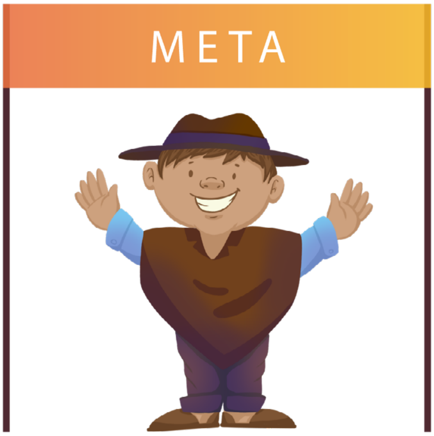
- Un caballo de careras alcanza 70 km en una hora.
- El guepardo recorre 100 Km en una hora.
- El elefante africano recorre 40 Km en una hora.
- El antílope alcanza a recorrer 88 Km en una hora.
- El delfín nada 48 Km en una hora.

Ordena de menor a mayor estas velocidades: ¿Cuál de estos animales recorre más kilómetros en una hora? ¿Cuál recorre menos kilómetros en una hora?

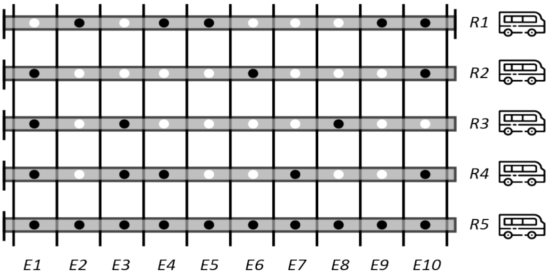
c. Las abejas se caracterizan por ser organizadas y laboriosas, además, que elaboran la miel que consumimos. Dicho proceso comienza con recolección del néctar del interior de las flores; después, lo llevan a la colmena y del néctar hacen la miel. Hoy en día, una colmena doméstica alberga hasta 60. 000 abejas obreras que hacen la miel:

- ¿Qué porción total de las abejas obreras de una colmena doméstica son 30.000 abejas?
- ¿Qué porción total de las abejas obreras de una colmena doméstica son 45.000 abejas?

Prueba Saber Pro



1. Un sistema de transporte masivo tiene varias estaciones (E1, E2,...) en una avenida. En condiciones normales, entre dos estaciones consecutivas, un bus se demora 4 minutos, y en cada parada, 30 segundos. En la figura, los círculos sombreados representan las paradas de cada ruta (R1, R2,...).



Un usuario que desea ir de E1 a E10 en menor tiempo, determinó, con base en la figura, que la ruta que más le convenía tomar era R2 y estimó el tiempo que tardaría viajando en el bus así:

I. Contó la cantidad de tramos entre estaciones consecutivas que había en su recorrido: 10.

II. Multiplicó el número obtenido (10) por la cantidad de minutos (4) que tardará entre dos estaciones consecutivas: 40 minutos.

III. Al resultado anterior le sumó 30 segundos por la parada que hará en E6: 40,5 minutos.

Este procedimiento es incorrecto en:

A. I solamente.

B. I y II solamente.

C. II solamente.

D. II y III solamente.

2. Una persona que vive en Colombia tiene inversiones en dólares en Estados Unidos y sabe que la tasa de cambio del dólar respecto al peso colombiano se mantendrá constante este mes. Si 1 dólar equivale a 2.000 pesos colombianos y su inversión en dólares le dará ganancias del 3 % en el mismo periodo, un amigo le asegura que en pesos sus ganancias también serán del 3 %. La afirmación de su amigo es:

   A. Correcta, pues, sin importar las variaciones en la tasa de cambio, la proporción en que aumenta la inversión en dólares es la misma que en pesos.

   B. Incorrecta, pues debería conocerse el valor exacto de la inversión para poder calcular la cantidad de dinero que ganará.

   C. Correcta, pues el 3 % representa una proporción fija en cualquiera de las dos monedas, puesto que la tasa de cambio permanecerá constante.

   D. Incorrecta, pues el 3 % representa un incremento que será mayor en pesos colombianos, pues, en esta moneda cada dólar representa un valor de 2.000.

3. Las directivas de un colegio tienen que organizar un viaje a un museo con 140 estudiantes, quienes deben dividirse en 3 grupos. Cada grupo irá en una franja diferente, pero el costo total de las entradas se asumirá equitativamente por los estudiantes. En la siguiente tabla se muestran los horarios disponibles, la máxima cantidad de estudiantes y los precios respectivos de cada horario.

Franja	Horario	Cantidad máxima de estudiantes	Precio entrada por estudiante
1	8 h - 10 h	50	$35.000
2	10 h - 12 h	40	$40.000
3	12h - 14 h	30	$50.000
4	14 h - 16 h	60	$45.000

Con el fin de que todos los estudiantes asistan y paguen el menor precio, las directivas eligieron las franjas 1, 3 y 4. ¿Esta elección garantiza que asistan todos los estudiantes al menor precio posible?

A. Sí, porque esas franjas suman exactamente 140 estudiantes.

B. No, porque es posible obtener un precio menor eligiendo la franja 2 en lugar de la franja 3.

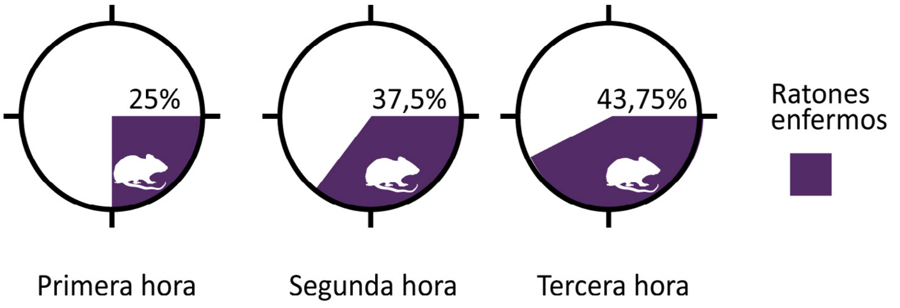
C. Sí, porque se incluyó la franja 1 que es la de menor precio por estudiante.

D. No, porque los estudiantes que van en la franja 3 pagan más.

Responda las preguntas 4 y 5 de acuerdo con la siguiente información:

Experimento con ratones

Para probar el efecto que tiene una vacuna aplicada a 516 ratones sanos, se realiza un experimento en un laboratorio. El experimento consiste en identificar durante algunas horas la regularidad en el porcentaje de ratones que se enferman al ser expuestos posteriormente al virus que ataca la vacuna. Las siguientes gráficas representan el porcentaje de ratones enfermos al cabo de la primera, segunda y tercera hora de iniciado el experimento.



4. Respecto al estado de los ratones con el paso del tiempo NO es correcto afirmar que:

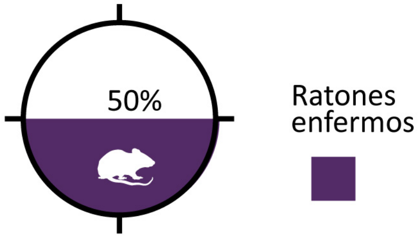
A. Al cabo de la primera hora hay 75 ratones sanos.

B. Al cabo de la primera hora hay 129 ratones enfermos.

C. Transcurridas dos horas y media hay más ratones sanos que enfermos.

D. Entre la segunda y tercera hora el número de ratones enfermos aumentó en 6,25 %.

5. Observando los datos anteriores y considerando la regularidad en <u>el porcentaje de ratones enfermos</u>, un integrante del equipo de investigación representó, en la siguiente gráfica, el porcentaje de ratones enfermos al cabo de la cuarta hora de iniciado el experimento.



Cuarta hora

Esta gráfica **NO** es correcta porque:

A. La información que se representa corresponde al porcentaje de ratones enfermos al cabo de la quinta hora de iniciado el experimento.

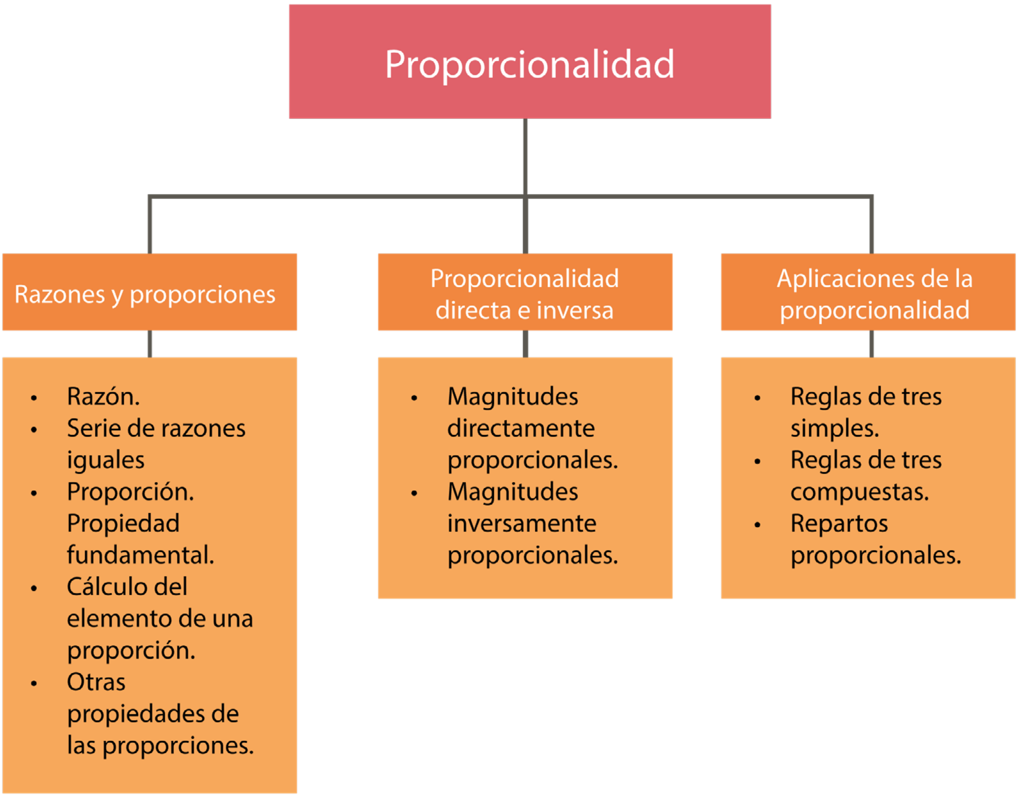
B. Al cabo de la cuarta hora de iniciado el experimento debería haber 3,125 % menos ratones enfermos que los representados.

C. La información que se representa corresponde al porcentaje de ratones enfermos al cabo de tres horas y media de iniciado el experimento.

D. Al cabo de la cuarta hora de iniciado el experimento debería haber 56,25 % de ratones enfermos.

Capítulo 2.

Proporcionalidad



Propósito

Para nadie es un secreto que las matemáticas en la actualidad juegan un papel importante en la vida del ser humano y, por ende, en su vida cotidiana. Para lograr que los educandos rompan paradigmas acerca de la enseñanza de esta disciplina, es importante que él comprenda el conocimiento matemático desde las diferentes temáticas que se abordan, entre ellas la proporcionalidad.

Esto conlleva que el docente conduzca al educando a analizar las relaciones entre dos o más variables en un proceso social para estimar comportamientos con base en sus resultados. Por otro otra parte, desde el aprestamiento de esta temática se debe llevar al estudiante a que establezca relaciones con magnitudes del espacio y propiedades físicas que lo rodean. Por lo tanto, se debe realizar actividades sobre solución de situaciones problemas y ejercicios de las proporciones.

Es importante resaltar que la proporcionalidad es aplicada en diferentes disciplinas: Ingeniería en la elaboración de maquetas a diferentes escalas, área contable en lo referente a los aspectos financieros, y en la cotidianidad en ciertas operaciones aritméticas.

Resumen

Esta unidad está diseñada para que el estudiante aborde las temáticas relacionadas con razones y proporciones, proporcionalidad directa e inversa, las diferentes aplicaciones de la proporcionalidad: regla tres simple directa e inversa, regla de tres compuesta y los repartos proporcionales. Lo anterior es importante para la solución de situaciones de su cotidianidad.

En este sentido, se pretende que, al finalizar la unidad, el estudiante sea capaz de:

- Explicar y definir los conceptos relacionados con razones y proporciones, proporcionalidad directa e inversa y sus diferentes aplicaciones en la vida cotidiana.

- Aplicar los conceptos de proporcionalidad, regla de tres simple directa, inversa, compuesta y repartos proporcionales en las diferentes situaciones del contexto real.

- Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.

- Definir y conceptualizar proporcionalidad directa e inversa teniendo en cuenta las condiciones iniciales en una situación problema.

Competencias

Comunicación: expresa situaciones para solucionar diferentes tipos de problemas relacionados con proporcionalidad, regla de tres y repartos proporcionales.

Razonamiento:

- Interpreta y utiliza razones en diferentes contextos de su cotidianidad para mostrar las relaciones de dos cantidades usando la notación apropiada.

- Describe una proporción como dos razones equivalentes.

Resolución de problemas

- Utiliza situaciones de su entorno para solucionar problemas a partir de las razones y proporciones.

- Soluciona problemas de aplicación de un contexto determinado con regla de tres y los repartos proporcionales.

Aprendizajes

- Desarrollar el pensamiento matemático para razonar y explorar las relaciones entre las razones y proporciones en situaciones propias de la vida cotidiana.

- Aplicar diferentes modelos y estrategias didácticas en la solución de problemas que requieran el uso de las aplicaciones de la proporcionalidad.

- Aplicar el concepto de proporcionalidad y herramientas didácticas en la solución de problemas del contexto.

Razones y proporciones

Saberes previos

1. Simplificar las siguientes expresiones y hallar el resultado:

   a. $\dfrac{25 \,.\, 19}{15}$ b. $\dfrac{300 \,.\, 15}{100}$ c. $\dfrac{750 \,.\, 20}{100}$

2. Calcular la expresión decimal de las siguientes fracciones

   a. $\dfrac{256}{100}$ b. $\dfrac{5}{100}$ c. $\dfrac{7}{4}$

3. Encontrar la fracción decimal en las siguientes expresiones decimales.

   a. 0,25 b. 1,75 c. 1,25

4. Desarrollar las siguientes ecuaciones

   a. $\dfrac{5}{x} = \dfrac{15}{27}$ b. $\dfrac{18}{x} = \dfrac{28}{14}$ c. $\dfrac{2.5}{7} = \dfrac{x}{4}$

Estructuración de saberes

A diario se hacen comparaciones entre objetos en matemáticas. Una de las formas de comparar cantidades es a través de las razones y proporciones.

Razón

Razón

La razón entre dos cantidades m y n, con $n \neq 0$ es el cociente indicado de dichas cantidades.

Se simboliza como $\frac{m}{n}$ o m:n y se lee m es a n, donde m es el antecedente y n es el consecuente.

Ejemplos:

$$\frac{5}{2}, \quad \frac{0{,}08}{5}, \quad \frac{\frac{1}{2}}{7}$$

Ejercicios

1. Escribir cada expresión como una razón:

   a. 40 es a 20　　b. 3/2 es a 3/4　　c. 2/5 es a 0,05

Solución

a. $\frac{40}{24}$　　b. $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}$　　c. $\frac{\frac{2}{5}}{0{,}05}$

2. Expresa mediante una razón las siguientes situaciones:
   a. En un colegio hay 12 mujeres por cada 24 estudiantes de un salón.
   b. En el país, 12 de cada 50 personas mueren por coronavirus.
   c. En la preparación de un postre se pide 4 libras de harina por cada 700 gr de mantequilla.

Solución

a. La razón es $\frac{12}{24}$

b. La razón es $\frac{12}{50}$

c. La razón es $\frac{4}{700}$

Serie de razones Iguales

Serie de razones iguales

Se denomina conjunto de razones iguales a la igualdad de dos o más razones. Se simboliza así:

$$\frac{g}{h} = \frac{j}{k} = \frac{m}{n} \ldots$$

Es una serie de razones iguales

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16}$$

Propiedad fundamental de una serie de razones

En un conjunto de razones iguales, la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes es equivalente a una de las razones de la serie. Se simboliza así:

$$\text{Si } \frac{m}{n} = \frac{o}{p} = \frac{q}{r} \rightarrow \frac{m+o+q}{n+p+r} = \frac{m}{n} = \frac{o}{p} = \frac{q}{r}$$

Ejemplo

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16} \rightarrow \frac{1+3+5+8}{2+6+10+16} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$$

Ejercicios

Encontrar el término desconocido en cada conjunto de razones iguales:

a. $\frac{m}{2} = \frac{n}{6}$ si m + n = 12

Solución

$$\frac{m}{2} = \frac{n}{6} \rightarrow \frac{m+n}{2+6} = \frac{m}{2}\ ,\ m + n = 12$$

Entonces:

$$\frac{12}{8} = \frac{m}{2} \rightarrow m = \frac{12\ .\ 2}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\frac{m+n}{2+6} = \frac{n}{6} \rightarrow \frac{12}{8} = \frac{n}{6}$$

$$8\ .\ n = 12\ .\ 6$$

Al despejar n, se obtiene:

$$n = \frac{72}{8} = 9$$

$$\frac{m}{6} = \frac{n}{2} = \frac{t}{1} \quad \text{si } m + n + t = \frac{3}{4}$$

$$\frac{m+n+t}{6+2+1} = \frac{m}{6}$$

Al reemplazar:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{1}} = \frac{m}{6}$$

Al efectuar el producto de extremos por el producto de los valores que ocupan los medios, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{3}{36} = \frac{m}{6}$$

Al despejar m, se obtiene:

$$36\ m = 3\ .\ 6 \rightarrow m = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Análogamente, se realiza para n:

$$\frac{m+n+t}{6+2+1} = \frac{n}{2} ; \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{1}} = \frac{n}{2} \rightarrow \frac{3}{36} = \frac{n}{2} \rightarrow n \,.\, 36 = 3 \,.\, 2 \rightarrow n = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

De igual manera se realiza para t:

$$\frac{m+n+t}{6+2+1} = \frac{t}{1} ; \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{1}} = \frac{t}{1} \rightarrow \frac{3}{36} = \frac{t}{1} \rightarrow t \,.\, 36 = 3 \,.\, 1 \rightarrow n = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Proporción

Proporción

Una proporción es una identidad entre dos razones. Una proporción entre las razones con g≠ 0 e i≠ 0. Se escribe así:

$$\frac{f}{g} = \frac{h}{i} \quad o \quad f : g = h : i$$

Se lee f es a g como h es a i. Los términos f - i reciben el nombre de extremos y los términos g - h reciben el nombre de medios.

Propiedad fundamental de las proporciones

Simbólicamente

$$\frac{f}{g} = \frac{h}{i} \rightarrow f \,.\, i = g \,.\, h$$

Ejemplo en la proporción

$$\frac{2}{7} = \frac{6}{21} \rightarrow 2 \,.\, 21 = 6 \,.\, 7 = 42 = 42$$

Cálculo del elemento de una proporción

Para calcular el término desconocido de una proporción, se procede de la siguiente manera:

Caso I	Si el término desconocido es un extremo, para encontrarlo se divide el producto de los términos medios en el otro extremo. En general: $\frac{f}{g} = \frac{h}{i} \rightarrow f = \frac{g \cdot h}{i}$ o $i = \frac{g \cdot h}{f}$
Caso II	Si el término desconocido es un medio, para hallarlo se divide el producto de los extremos entre el otro medio. En general, $\frac{f}{g} = \frac{h}{i} \rightarrow g = \frac{f \cdot i}{h}$ o $h = \frac{f \cdot i}{g}$

Ejercicios solucionados

Calcular el término desconocido en las siguientes proporciones:

a. $\frac{x}{2} = \frac{15}{6} \rightarrow 6x = 2 \cdot 15 \rightarrow x = \frac{2 \cdot 15}{6} = \frac{30}{6} = \frac{15}{3} = 5$

b. $\frac{36}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow x \cdot x = 36 \cdot 4 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = \sqrt{144} = \pm 12$

Ejemplos con problemas de aplicación

Plantear una proporción para resolver cada una de las siguientes situaciones:

1. El cociente entre las edades de María y Pedro es de $\frac{7}{5}$, si la suma de las edades es 24 ¿cuál es la edad de María y de Pedro?

Solución

Sea *x* la edad de María y sea *y* la edad de Pedro, entonces, la proporción es la siguiente:

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{5} \quad \text{además} \quad \frac{x+y}{x} = \frac{7+5}{7}$$

es decir,

$$\frac{24}{x} = \frac{12}{7} \quad \text{donde} \quad 12 \,.\, x = 24 \,.\, 7 \longrightarrow x = \frac{168}{12} = 14$$

Por tanto, la edad de María es 14 y la edad de Pedro es 10 ya que 14 + 10 = 24.

2. En un colegio hay cuatro computadores por cada 50 estudiantes. Si hay 80 computadores ¿Cuántos estudiantes hay en el colegio?

Solución

La razón entre 4 y 50 debe ser la misma que entre 80 y el valor desconocido (x), la cual representará el total de estudiantes del colegio. Por lo tanto, la proporción será la siguiente:

$$\frac{4}{50} = \frac{80}{x} \quad \text{es decir,} \quad 4 \,.\, x = 80 \,.\, 50 \quad \text{al despejar x queda así:} \quad x = \frac{80 \,.\, 50}{4} = \frac{4.000}{4} = 1.000$$

En el colegio hay un total de 1.000 estudiantes.

Otras propiedades de las proporciones

Descripción	Propiedad	Ejemplo
Si en una proporción se intercambian los medios o los extremos, se obtienen nuevas proporciones	Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces, $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ y $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ son nuevas proporciones	Si $\frac{10}{60} = \frac{16}{96}$ entonces, $\frac{96}{60} = \frac{16}{10}$ y $\frac{10}{16} = \frac{60}{96}$ son nuevas proporciones
En una proporción, la suma del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente	Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ nuevas proporciones	$\frac{4}{6} = \frac{16}{24}$ entonces, $\frac{4+6}{6} = \frac{16+24}{24}$ $\frac{10}{6} = \frac{40}{24}$

Proporcionalidad directa e inversa

Saberes previos

1. Complete cada uno de los siguientes espacios con la palabra más o menos:

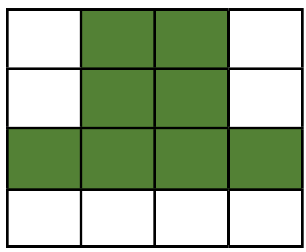
    a. Tienes $40.000 para comprar confites. Entre más alto sea el valor del confite __________ unidades puedes comprar.

    b. Vas en bicicleta desde tu casa hasta la casa de un amigo que vive a 20 cuadras. Entre más rápido vayas ___________ tiempo gastarás.

    c. Se quiere preparar un postre para una fiesta, entre más invitados vayan ____________ ingredientes se necesitan para preparar el postre.

    d. Una persona está ahorrando para irse de paseo de fin de año. Entre más dinero ahorre semanalmente ___________ dinero tendrás al finalizar el año.

2. Con base en la relación 1:2, utilice una cuadricula para realizar un modelo ampliado de la siguiente figura.



3. ¿1:2 es la razón entre el perímetro de la figura original y el perímetro de la figura ampliada?

4. ¿1:2 es la razón entre el área de la figura original y el área de la figura ampliada?

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes a y b son directamente proporcionales si:

1. Al aumentar o disminuir una de las variables, la otra variable también disminuye o aumenta en la misma proporción.
2. El cociente entre las dos magnitudes es constante, es decir:

$$\frac{a}{b} = k$$

Donde k es la constante de proporcionalidad.

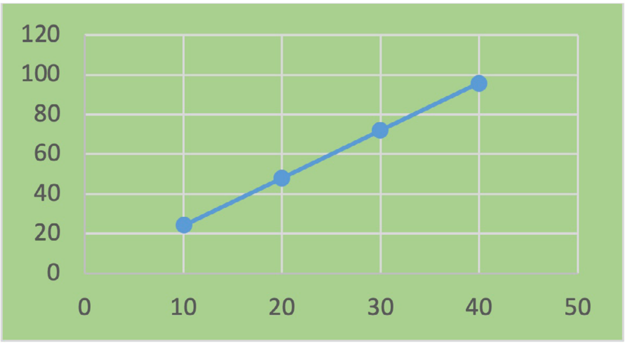
Ejercicios

a. Carlos obtiene los siguientes datos al recoger frutas de la huerta de su padre:

Tiempo (horas)	10	20	30	40
Frutas(libras)	24	48	72	96

Solución

Elabore la gráfica correspondiente y verifique si el tiempo y las libras de fruta que se recoge son magnitudes directamente proporcionales, así.



- Al aumentar el tiempo, la cantidad de libras de fruta que recoge también aumenta.

- La razón entre los valores de la cantidad de libras de fruta y el tiempo es contante.

$$\frac{\text{Frutas (libras)}}{\text{Tiempo (horas)}} = \frac{24}{10} = \frac{48}{20} = \frac{72}{30} = \frac{96}{40} = 2{,}4$$

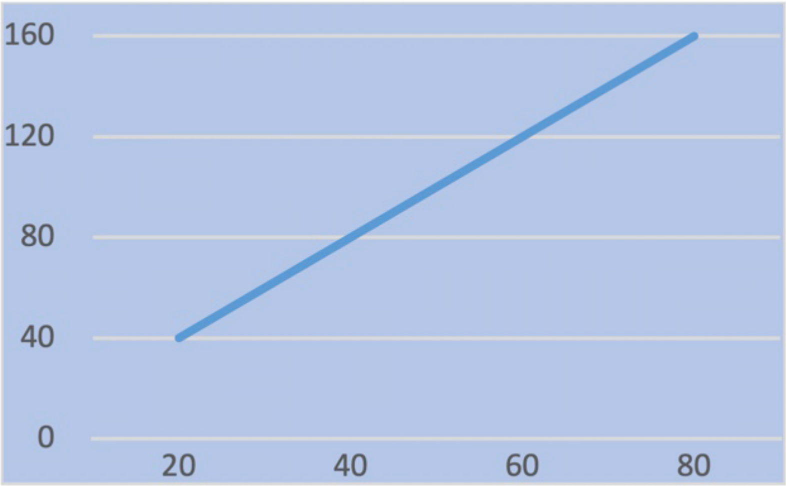
2,4 es la constante de proporcionalidad. Significa que cada hora se recogen 2,4 libras de fruta. Por tanto, las dos magnitudes son directamente proporcionales.

b. Un ciclista registra la distancia recorrida y el tiempo empleado para controlar su rendimiento. A continuación, se muestran los datos registrados:

Tiempo (horas)	20	40	60	80
Distancia (Km)	40	80	120	160

Solución

Elabore la gráfica correspondiente y verifique si el tiempo y la distancia recorrida por el ciclista son magnitudes directamente proporcionales, así:



- Al aumentar el tiempo, la cantidad de kilómetros recogidos también aumenta.

- La razón entre los valores de la distancia recorrida y el tiempo es contante.

$$\frac{\text{Distancia (Km)}}{\text{Tiempo (horas)}} = \frac{40}{20} = \frac{80}{40} = \frac{120}{60} = \frac{160}{80} = 2$$

2 es la constante de proporcionalidad. Significa que cada hora se recorre dos kilómetros. Por tanto, las dos magnitudes son directamente proporcionales.

Magnitudes inversamente proporcionales

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes a y b son inversamente proporcionales si:

1. Al aumentar una de las magnitudes, la otra magnitud disminuye en la misma proporción.
2. El producto entre los valores de las dos magnitudes es constante. Es decir, **a . b = k** donde k es la constante de proporcionalidad.

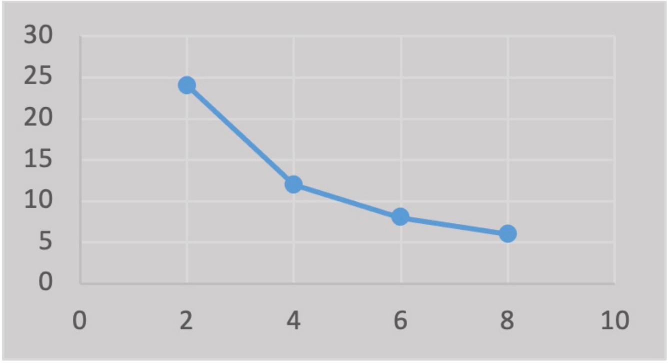
Ejercicios solucionados

a. En la clase de pensamiento matemático, los estudiantes experimentan con una balanza de dos brazos. Ellos fijan 3 pesas a una distancia de 4 unidades del centro y deben colocar en el brazo izquierdo diferentes pesas a una misma distancia, hasta lograr equilibrarla. Determinar si la magnitud, distancia y número de pesas son inversamente proporcionales.

Distancia (unidades)	2	4	6	8
Número de pesas	24	12	8	6

Solución:

Elabore la gráfica correspondiente y verifique si el número de pesas y la distancia son magnitudes inversamente proporcionales, así:



- Al aumentar la distancia, la cantidad de pesas disminuye.

- El producto entre los valores de la distancia y el número de pesas es contante.

distancia . número de pesas = 2 . 24 = 4 . 12 = 6 . 8 = 8.6 = 48

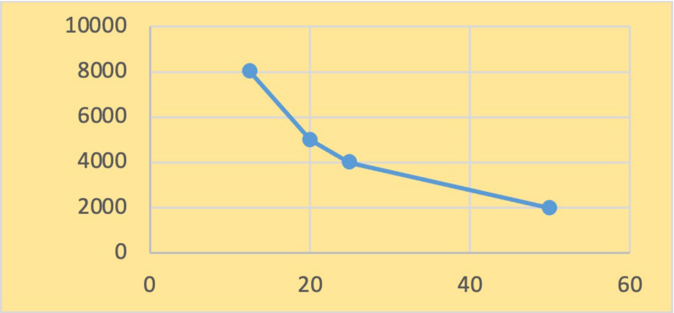
Por tanto, las dos magnitudes son inversamente proporcionales.

b. Camila tiene como meta ahorrar semanalmente hasta reunir $ 200.000. Construye una tabla para establecer en cuantas semanas logrará cumplir su meta, dependiendo de la cantidad de dinero que ahorre semanalmente:

Dinero ahorrado semanalmente ($)	2.000	4.000	5.000	8.000
Tiempo (semanas)	50	25	20	12,5

Solución:

Elabore la gráfica correspondiente y verifique si la cantidad de dinero ahorrado semanalmente y el tiempo se relacionan de forma inversamente proporcional, así:



dinero ahorrado . tiempo en semanas = 2.000 . 50 = 4.000 . 25 = 5.000 . 20 = 8.000 . 12,5 = 100.000

Por tanto, las dos magnitudes se relacionan inversamente proporcional.

Aplicaciones de la proporcionalidad

Regla de tres simple

Saberes previos

1. Verifica las propiedades de las proporciones a partir de la siguiente proporción:

$$\frac{16}{24} = \frac{12}{18}$$

2. Identifica cuales de las siguientes correlaciones son proporciones directas:

   - El radio de un círculo y la medida de la circunferencia.
   - La longitud de la sombra y la altura de un objeto.
   - El lado de un cubo y su volumen.

3. Identifica en los siguientes pares de magnitudes las que se relacionan inversamente proporcional:

   - El número de caramelos que se pueden adquirir con cierto dinero y el precio de cada caramelo.
   - El tiempo estimado para terminar una construcción y el número de obreros que la realizan si trabajan al mismo ritmo.
   - La cantidad de galletas que quedan en un tarro y el número de galletas que se consumen a diario.

Regla de Tres Simple

Si en una situación problema se tienen dos magnitudes para relacionarse, se trata de una regla de tres simple.

Cuando las dos magnitudes que se comparan son directamente proporcionales, se habla de regla de tres simple directa. Simbólicamente:

$$\frac{a}{c} \rightarrow \frac{b}{x} = a \,.\, x = b \,.\, c \rightarrow x = \frac{b \,.\, c}{a}$$

Cuando las dos magnitudes que se comparan son inversamente proporcionales, se habla de regla de tres simple inversa. Simbólicamente:

$$\frac{a}{c} \rightarrow \frac{b}{x} = a \,.\, b = c \,.\, x \rightarrow x = \frac{a \,.\, b}{c}$$

Ejercicios

a. En un supermercado reconocido de la ciudad de Tunja venden 1.000 gr de queso en $ 11.000. ¿Cuál es el precio de un bloque de 2.500 gr?

Solución

Las dos magnitudes: gramos de queso y precio, al relacionarse, se puede establecer que a mayor cantidad de gramos de queso mayor será el precio, por lo tanto, varían en forma directamente proporcional. Es decir, se tiene una regla de tres simple directa:

$$\frac{1.000}{2.500} \rightarrow \frac{11.000}{x} = 1.000 \,.\, x = 11.000 \,.\, 2.500 \rightarrow x = \frac{27.500.000}{1.000} = \$27.500$$

El bloque de queso de 2.500 gramos tiene un valor de $ 27.500.

b. Para el festival de teatro, un grupo de estudiantes del programa LEP de la UPTC está elaborando la escenografía de su obra. 24 estudiantes, trabajando todos al mismo ritmo, han hecho la mitad de la escenografía en 36 horas. Si 8 estudiantes desisten de participar en la obra, ¿cuántas horas tardarán en terminar la obra los estudiantes que quedan?

Solución

Si se observa las dos magnitudes a relacionar número de estudiantes y número de horas, se puede establecer que, a menos cantidad de estudiantes mayor será el tiempo empleado para terminar la obra, por lo tanto, las estas magnitudes varían en forma inversamente proporcional. Es decir, se tiene una regla de tres simple inversa:

$$\frac{24}{16} \rightarrow \frac{36}{x} = 24 \,.\, 36 = 16 \,.\, x \rightarrow x = \frac{864}{16} = 54$$

Los 16 estudiantes tardaran 54 horas para terminar la escenografía de su obra.

Reglas de tres compuesta

Saberes previos

a. Resuelva las siguientes multiplicaciones entre fracciones:

- $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{5} =$
- $\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{10} =$
- $\frac{5}{11} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{4}{5} =$

b. Identifique si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

- El número de horas trabajadas por un empleado y el tiempo para terminar el trabajo.
- El volumen de una pelota y el número de unidades que se pueden empacar en una caja grande.
- El área de la base de una caja y su altura si el volumen es el mismo.

Regla de tres compuesta

Cuando se tiene tres o más magnitudes para relacionar, es necesario acudir a la regla de tres compuesta. La regla de tres compuesta se aplica en la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta

Ejercicios

a. En una fábrica de bebidas, 10 máquinas empacadoras envasan 14.400 cajas de jugo de 2 litros de capacidad en 2 horas. ¿En cuánto tiempo se empacarán 17.280 cajas de jugos de 3 litros si se aumenta una máquina más?

Solución:

Para solucionar problemas relacionados con regla de tres compuesta es conveniente:

- Organizar los datos del problema en una tabla

N.º de máquinas	N.º de cajas	Capacidad de las cajas	Tiempo
10	14.400	2	4
11	17.280	3	x

- Comparar las magnitudes de dos en dos, así: el número de máquinas y el tiempo son inversamente proporcionales, el número de cajas de jugo y el tiempo son directamente proporcionales y, por último, la capacidad de las cajas y el tiempo son directamente proporcionales.

- Anotar las conclusiones y las razones directas o inversas en la tabla.

N.º de máquinas	N.º de cajas	Capacidad de las cajas	Tiempo
10	14.400	2	4
11	17.280	3	x
Razón inversa $\frac{11}{10}$	Razón directa $\frac{14.400}{17.280}$	Razón directa $\frac{2}{3}$	Razón directa $\frac{4}{x}$

Establecer las proporciones:

$$\frac{4}{x} = \frac{11}{10} \cdot \frac{14.400}{17.280} \cdot \frac{2}{3} \qquad \frac{4}{x} = \frac{316.800}{518.400}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{11}{10} \longrightarrow 11 \cdot x = 4 \cdot 18 = 11 \cdot x = 72 \longrightarrow x = \frac{72}{11} = 6{,}5$$

En 6,5 horas, 11 máquinas empacan 17.280 cajas de jugo de 3 litros.

b. Para una actividad con los estudiantes de LEB de sexto semestre de la UPTC, se contratan 5 buses para que en 4 viajes trasladen 800 estudiantes a un teatro. Para una nueva salida de solo 400 estudiantes, se contratan 2 buses de igual capacidad. ¿Cuántos viajes deben realizar los buses?

Solución

Para solucionar problemas relacionados con regla de tres compuesta es conveniente:

- Organizar los datos del problema en una tabla, así:

N.º de buses	N.º de estudiantes	N.º de viajes
5	800	4
2	400	x

- Anotar las conclusiones y las razones directas o inversas en la tabla:

N.º de buses	N.º de estudiantes	N.º de viajes
5	800	4
2	400	x
Razón inversa $\frac{2}{5}$	Razón directa $\frac{800}{400}$	Razón directa $\frac{4}{x}$

- Establecer las proporciones:

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{800}{400}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1.600}{2.000} \longrightarrow 1.600 \cdot x = 4 \cdot 2.000 = 1.600. x = 8000 \longrightarrow x = \frac{800}{1.600} = 5$$

Se deben realizar 5 viajes para transportar a los estudiantes.

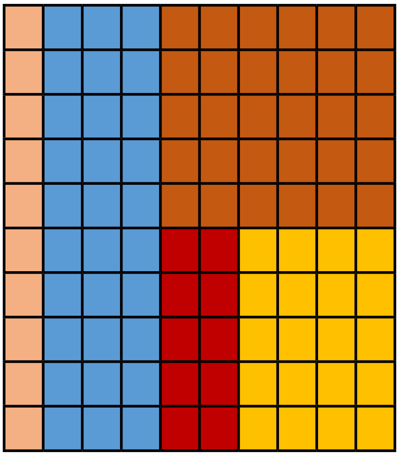
Repartos proporcionales

Saberes previos

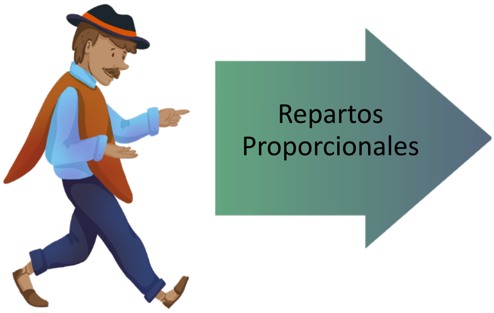
a. Escribe fracciones equivalentes a las que se dan usando el mínimo común denominador

- $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}$
- $\frac{5}{2}, \frac{10}{4}, \frac{15}{6}$
- $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$

b. Escribe la fracción correspondiente a cada sección de diferente color:



c. Con la siguiente proporción $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$ verifica la siguiente propiedad de las proporciones: La suma de antecedentes es a la suma de consecuentes, como cualquier antecedente es a su consecuente.



Cuando se quiere dividir una cantidad en partes directamente proporcionales es necesario tener presente el siguiente esquema.

x = a   y = b   Z = c   entonces,

$$K = \frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{\text{cantidad que se desea repartir}}{\text{partes en las que se quiere repartir}}$$

x = K . a   y = K . b   Z = K . c

Repartos Proporcionales

Cuando se quiere repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales es necesario tener presente el siguiente esquema

x = a   y = b   Z = c   entonces,

$$K = \frac{a + b + c}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{\textit{cantidad que se desea repartir}}{\textit{partes en las que se quiere repartir}}$$

x = K / a   y = K / b   Z = K / c

Ejercicios solucionados

a. Para crear una empresa de textiles tres socios aportan \$ 5.000.000, \$ 8.000.000 y \$ 10.000.000 respectivamente. Después de un tiempo, la empresa tiene \$ 23.000.000 de ganancias. ¿Qué cantidad le corresponde a cada socio si la utilidad la distribuyen en forma directamente proporcional al capital invertido?

Solución

Sea x= primer socio, y= segundo socio, z= tercer socio

x = a = \$ 5.000.000

y = b = \$ 8.000.000

z = c = \$ 10.000.000

Por otro lado, a + b + c = \$ 23.000.000

$$K = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{23.000.000}{5.000.000 + 8.000.000 + 10.000.000} = \frac{23.000.000}{23.000.000} = 1$$

Lo que le corresponde al socio 1 es x = a . K = \$ 5.000.000 x 1 = \$ 5.000.000

Lo que le corresponde al socio 2 es y = b . K = \$ 8.000.000 x 1 = \$ 8.000.000

Lo que le corresponde al socio 3 es z = c . K = \$ 10.000.000 x 1 = \$ 10.000.000

Después de un tiempo las ganancias serán de \$ 5.000.000 para el primer socio, \$ 8.000.000 para el segundo y \$ 10.000.000 para el tercero.

b. Un entrenador de baloncesto quiere premiar a tres de sus jugadores por la puntualidad en la asistencia a los entrenamientos, repartiendo 76 chocolatinas entre ellos. Si han tenido 2, 4 y 5 ausencias respectivamente. ¿Cuántas chocolatinas recibirá cada uno?

Solución

Analizando la situación planteada, podemos concluir que el que menos ausencias a los entrenamientos tenga, obtendrá el mayor número de chocolatinas, es decir que, el reparto es inversamente proporcional.

Sea x = primer jugador, y = segundo jugador, z= tercer jugador

x = a = 2

y = b = 4

z = c = 5

Además, a + b + c = 76

$$K = \frac{a+b+c}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{76}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{76}{\frac{10+5+4}{20}} \quad \textit{Sacando común denominador}$$

$$K = \frac{\frac{76}{1}}{\frac{19}{20}} = \frac{76.20}{1.19} = \frac{1.520}{19} = 80$$

Entonces $x = \frac{K}{a} = \frac{80}{2} = 40 \quad y = \frac{K}{b} = \frac{80}{4} = 20 \quad z = \frac{K}{c} = \frac{80}{5} = 16$

De acuerdo con el número de ausencias, el primer jugador obtiene 40 chocolatinas, el segundo jugador obtiene 20 chocolatinas y, el tercer jugador obtiene 16 chocolatinas.

Ejercicios de práctica

Actividad Individual

I. Complete las razones que faltan en cada secuencia.

1. $\frac{9}{2} = \frac{18}{4} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

2. $\frac{\square}{\square} = \frac{12}{6} = \frac{10}{5} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

3. $\frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

II. Calcule el valor de x en cada proporción.

1. $\frac{x}{6} = \frac{6}{9}$

2. $\frac{10}{x} = \frac{4}{8}$

3. $\frac{15}{3} = \frac{x}{8}$

III. Resuelve las siguientes situaciones relacionadas con razones.

1. Una botella de gaseosa de 500 ml vale $ 2.700, una de 1.200 ml vale $ 3.800 y una de 5 L, vale $ 8.400. Utiliza el valor de las razones para determinar cuál es la opción más económica.
2. Una receta para preparar galletas tiene las siguientes indicaciones: se deben usar 200 gr de mantequilla para 20 galletas. ¿Qué cantidad de mantequilla se requiere para preparar 50 galletas?
3. Formula un problema que se pueda solucionar con la siguiente proporción 22 es a 12 como 660 es a x.

IV. Resuelve las siguientes situaciones relacionadas con tipos de proporcionalidad:

1. Un conductor de transporte público lleva el control del consumo de gasolina de su bus y lo hace a partir de una tabla donde registra el número de galones de gasolina y la distancia recorrida:

No de galones de gasolina	Distancia recorrida (km)
2	100
12	600
16	800
20	1.000
30	1.500

a. ¿Hay una proporción directa entre la distancia recorrida y el número de galones de gasolina gastados? Escribe por lo menos tres argumentos para justificar tu respuesta. Incluye entre los argumentos una gráfica.

b. El conductor viaja 5 días a la semana, ida y vuelta, de la casa a la oficina que está ubicada a 20 Km. ¿Cuántos galones de gasolina gastará en una semana?

V. A continuación, se registra el máximo peso que el brazo de una grúa puede soportar a varias distancias

Distancia recorrida (m)	Peso (kg)
2	3.000
4	1.500
6	1.000
8	750
10	600

a. ¿Qué tipo de relación existente entre la distancia y el peso?

b. Escribe una ecuación que relacione el peso y la distancia.

c. Usa la ecuación para hallar el peso que la grúa puede levantar en las siguientes distancias:

- 12 m
- 5 m
- 3 m

d. Elabora una gráfica con los datos y explica cómo ilustra la forma de la gráfica la relación entre las magnitudes.

VI. Con las siguientes situaciones afianza tus conocimientos en regla de tres simple.

a. En un parqueadero de la ciudad de Tunja se cobra una tarifa por cada 15 minutos. Si un cliente ayer pagó $ 3.600 por 40 minutos. ¿Cuánto debe pagar hoy por haber parqueado durante 35 minutos?

b. Un granjero cuenta en su finca con 72 ovejas y alimento para ellas por el término de 56 días. ¿Con 36 ovejas menos, sin disminuir la ración diaria, cuántos días podrá alimentarlas?

VII. Fortalece tus conocimientos acerca de regla de tres compuesta a partir de las siguientes situaciones problema:

a. Una fábrica de bocadillos cuenta con 30 estufas, que se encienden 5 horas diarias y consumen 30 galones de combustible durante los primeros 25 días hábiles del mes. Si en el mes anterior se trabajó los mismos días hábiles con 5 estufas menos y, aun así, el consumo fue de 45 galones de combustible. ¿Cuántas horas diarias se encendieron las estufas?

b. En una empresa de lácteos reconocida de la ciudad, 3 máquinas envasan y sellan 1.500 bolsas de leche, en dos turnos de 12 horas cada uno. Si una de las máquinas sufre una avería y se debe envasar y sellar el mismo número de bolsas, ¿cuántos turnos de 9 horas deben trabajar?

VIII. Resuelve los siguientes problemas relacionados con repartos proporcionales:

a. Los habitantes de tres conjuntos residenciales de la ciudad deciden construir una cancha múltiple en común. El presupuesto de la obra asciende a $ 250.000.000. El primer conjunto tiene 20 casas, el segundo 32 y el tercero 23. ¿Cuánto debe aportar cada conjunto para la construcción de acuerdo al número de casas?

b. Un padre de familia al morir deja una fortuna de $ 500.000.000 y un testamento en el cual especifica la repartición entre sus tres hijos, Daniel que tiene 15 años, Mayra que tiene 30 años y Lina Paola que tiene 20 años, además estipula que en la repartición su hija menor sea la más beneficiada otorgándole ½ de la herencia y sus otros dos hermanos el restante en proporciones iguales. Teniendo en cuenta la voluntad de su padre, ¿cuánto dinero le corresponderá a cada uno?

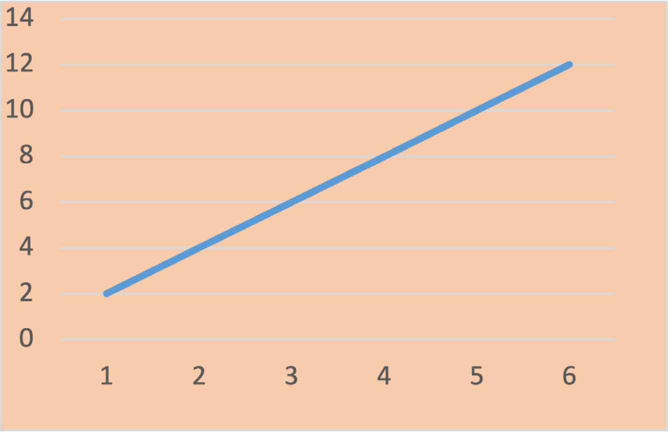
Actividad grupal

Resuelve en grupo las siguientes situaciones planteadas referentes a los temas de razones y proporciones.

1. Los estudiantes de pensamiento matemático del programa de LEP de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia tienen una salida pedagógica en la que acamparán una noche. El menú de la comida es pasta con salsa boloñesa, la cual viene lista en tarros. Por cada seis estudiantes se necesita un tarro de salsa.

   Si el grupo encargado de hacer las compras consigue una promoción de dos tarros por cada $ 6.000. ¿Cuántos tarros de salsa deben comprar y cuánto costarán si van 60, 72 o los 90 estudiantes?

2. Nairo Quintana entrena en el gimnasio para participar en el Tour de Francia. La caminadora en la que práctica mostró la siguiente gráfica



Nairo observa que existe una relación directa entre la distancia recorrida y el tiempo.

a. ¿Cuál es valor de la constante de proporcionalidad distancia/tiempo?

b. Utiliza la constante de proporcionalidad para hallar la distancia que recorrería en 1 minuto y en 10 minutos.

c. ¿En cuánto tiempo recorrerá 1.800 m?

3. Una abuela tiene en su cocina una gramera para pesar con exactitud los ingredientes que usa en sus recetas. Para preparar una torta de vainilla,

inicialmente, mezcla 225 gr de mantequilla con 360 gr de azúcar. Su nieta quiere preparar la torta en su casa, pero solo encuentra un bloque de mantequilla de 125 gr. ¿Cuánta azúcar debe utilizar?

4. Camilo y sus amigos planean un viaje de 40 km en bicicleta alrededor de un parque natural:

   a. ¿A qué velocidad deben ir si quieren completar el viaje en 4 horas?, ¿en 2 horas?, ¿en una hora y media? y ¿en 1 hora?

   b. Escribe una ecuación que relacione la velocidad y el tiempo para el trayecto de los 40 km.

   c. ¿Cómo se relacionan las magnitudes velocidad y tiempo en esta situación? Realiza una tabla y haz una gráfica para apoyar tu respuesta

   d. ¿Cuál de las siguientes modificaciones causa un mayor cambio en el valor de la velocidad: aumentar el tiempo del viaje de 1 a 2 horas, o aumentar el tiempo de 4 a 5 horas’

5. Para una jornada deportiva el grupo de primer semestre de LEP de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia quiere hacer una donación de una mesa de ping pong. Si en el regalo participan 15 estudiantes, cada uno tendría que aportar $ 20.000. Ellos motivan a sus compañeros y al final, 48 estudiantes quieren participar. ¿Cuál es la cuota que le correspondería a cada uno?

6. Andrés es un motociclista de competencia y entrena durante 40 días, 4 horas diarias y recorre 600 km. Si en los próximos 10 días dispone de 2 horas diarias para entrenar, ¿cuántos kilómetros recorrerá?

7. En un almacén se van a repartir $ 450.000 entre los cajeros como incentivo y reconocimiento a la exactitud en los registros.

   Los tres cajeros con mejor desempeño tienen la siguiente información en el sistema

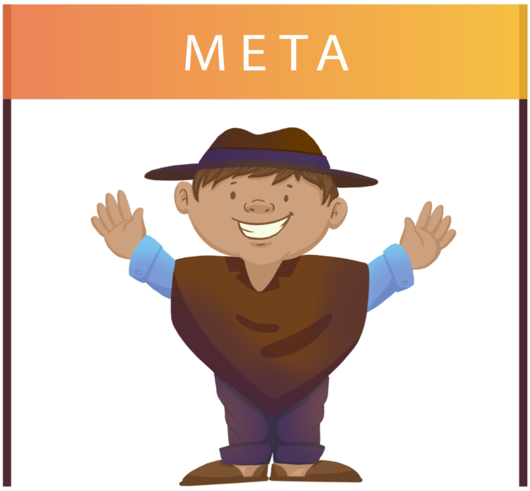
	Frecuencia	Periodo
Natalia	5	48
Raúl	8	30
Elvira	2	120

   a. Explica cómo utilizar por separado la frecuencia y el periodo para determinar la cantidad de dinero que recibirá cada uno de los cajeros.

b. Encuentra cómo distribuir el dinero utilizando la información correspondiente al número de errores en una jornada de trabajo.

c. Encuentra cómo distribuir el dinero utilizando la información sobre el tiempo entre error y error.

Prepárate para Saber Pro



Responda las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la siguiente información:

De un tanque lleno de agua con capacidad de 400 L, se extrae 1/5 de agua el día Lunes, 1/4 del agua restante el día Martes y 9/30 del agua que queda en el tanque, el día Miércoles.

1. La menor cantidad de agua se sacó el día:

   A. Miércoles.
   B. Lunes .
   C. En los tres días se extrajo la misma cantidad.
   D. Martes.

2. ¿Qué cantidad de agua queda disponible para el día jueves?

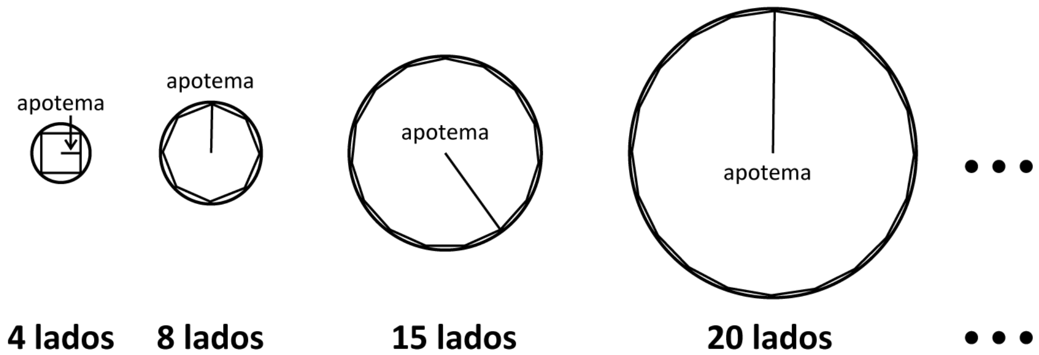
A. 175 litros.

B. 168 litros.

C. 232 litros.

D. 100 litros.

3. En la secuencia de figuras que aparecen a continuación, se representan polígonos regulares de lado 6, cada uno de ellos inscrito en una circunferencia. En cada polígono se señala la apotema.



Si se continúa la secuencia y el número de lados del polígono aumenta indefinidamente, la razón entre el perímetro del polígono y su apotema tiende a:

A. 3π

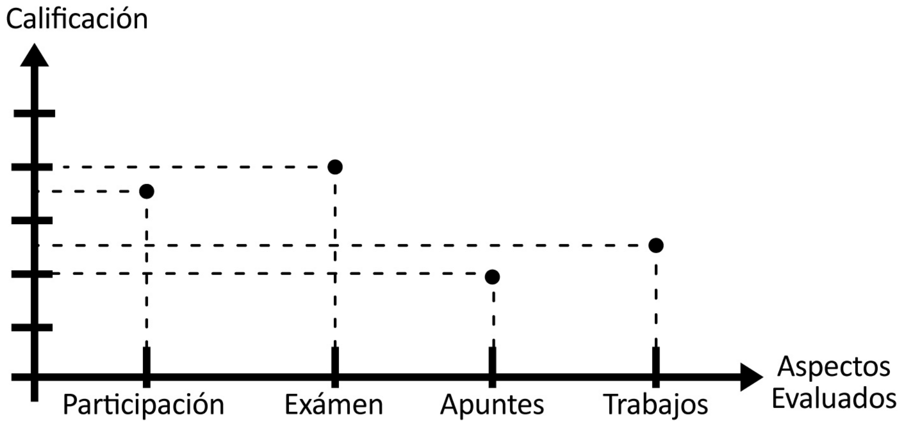
B. 6π

C. 2π

D. π

Responda las preguntas 4 y 5 de acuerdo con la siguiente información:

La gráfica muestra las calificaciones de 1 a 5, obtenidas por un estudiante en una materia en la universidad. Cada aspecto evaluado vale el 25 % para la calificación final:



Fuente: https://matematicafacil01.files.wordpress.com/2015/10/mat-9c2ba.pdf

4. Teniendo en cuenta que el porcentaje asignado al examen es del 25 %, la nota que obtiene el estudiante en este aspecto evaluado corresponde al:

   A. 4 %

   B. 25 %

   C. 20 %

   D. 6,25 %

5. Si se asignaran porcentajes diferentes a cada aspecto como se indica a continuación:

   Participación 20 %, apuntes 30 %, examen 20 %, trabajos 30 %. Y se sabe que con menos de 3.0 como calificación final se pierde, ¿el estudiante habría perdido la materia?

   Seleccione una:

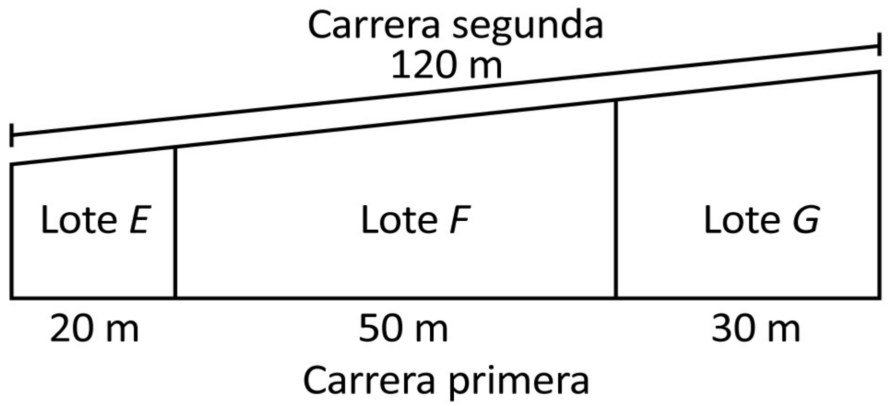
   A. No, porque no importa que se cambien los porcentajes, pues las calificaciones se mantienen.

   B. No, porque al promediar las notas obtiene 3.0.

   C. Sí, porque el estudiante tiene calificaciones por debajo de 3.0 en dos de los aspectos evaluados.

   D. Sí, porque la calificación obtenida sería 2.85.

6. En la siguiente ilustración se muestra el plano de tres lotes contiguos, E, F y G, y algunas de las medidas de sus lados. La suma de las medidas de los frentes sobre la carrera segunda es 120 m. Los segmentos resaltados en el plano son paralelos.



La medida frontal de los lotes E, F, G sobre la carrera segunda, respectivamente, son:

A. 16 m, 41 m y 25 m.

B. 24 m, 60 m y 36 m.

C. 24 m, 64 m y 32 m.

D. 40 m, 70 m y 50 m.

Capítulo 3.
Matemática Financiera

Matemática Financiera

- **Educación Económica y Financiera**
  - ¿Qué es un bien?
  - Consumo inteligente
  - Gastos
  - Ingresos
  - Presupuesto
  - Servicio
- **Ley de Oferta y Ley de Demanda**
  - ¿Qué es la oferta?
  - ¿Qué es la demanda?
  - Problemas de aplicación
  - Depreciación

Propósito de la matemática financiera

La matemática financiera es una de las tantas ramas que tiene la matemática, aborda los conceptos relacionados con la educación financiera como: interés simple, interés compuesto, depreciación, utilidad oferta y demanda, entre otros.

El estudiante aplicará estos conceptos en su vida cotidiana, en las operaciones financieras que tengan que ver con el flujo de dinero y su comportamiento a través del tiempo.

El propósito general de esta unidad es que el estudiante, al analizar los diferentes modelos de matemáticas financieras y su aplicación en su vida académica, profesional, empresarial e investigativa, pueda plantear a nivel académico los conceptos básicos de matemáticas, orientadas a un mejor desenvolvimiento en la comprensión y uso adecuado de las fórmulas que se utilizan en las matemáticas financieras.

De igual forma, lo que busca esta rama es, mostrarle al estudiante el papel que juega la matemática financiera y la utilidad que tiene, como herramienta financiera, para la toma de decisiones en inversiones, evaluación de proyectos y planes de negocio.

Resumen

En esta unidad, el estudiante abordará los temas relacionados con los conceptos generales de la matemática financiera como: bien, consumo inteligente, gastos, ingresos, presupuesto, servicio, interés imple e interés compuesto.

Así mismo se analizarán los conceptos relacionados con la ley de oferta, ley de demanda, la depreciación, utilidad, coste y función de costa y la forma como los puede aplicar en su vida cotidiana.

Al finalizar el estudio de esta unidad, el estudiante estará en la capacidad de:

- Explicar y definir los conceptos relacionados con matemáticas financieras y su importancia en la cotidianidad.
- Aplicar los conceptos de interés simple e interés compuesto en las diferentes operaciones financieras.
- Aplicar los conceptos de oferta, demanda, utilidad, coste y función de coste en la construcción de proyectos de inversión.
- Definir y conceptualizar el interés y sus respectivas equivalencias, las cuales podrá aplicar en la toma de decisiones de proyectos financieros.

Competencias

Comunicación: Aplica de manera coherente los conceptos necesarios para la solución de problemas de matemáticas financiera aplicados al contexto.

Razonamiento

- Interpreta y utiliza las expresiones matemáticas relacionadas con matemáticas financieras, usando la notación apropiada.

- Describe situaciones problema en donde aplica la relación entre la oferta y la demanda.

Resolución de problemas

- Utiliza situaciones relacionadas con matemáticas financieras para darles solución a partir de los conocimientos adquiridos.
- Soluciona problemas de aplicación de un contexto determinado a partir del interés simple y el interés compuesto.

Aprendizajes

- Utilizar el pensamiento lógico matemático para razonar y explorar las semejanzas entre el interés simple y el interés compuesto en situaciones propias de la vida cotidiana.
- Emplear diferentes modelos y estrategias didácticas en la solución de problemas que requieran el uso de las aplicaciones de la oferta y la demanda.
- Utilizar la matemática financiera y herramientas didácticas en la solución de problemas del contexto.

Educación Económica y Financiera

Saberes previos:

1. Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:

a. $\frac{2}{6} + \frac{6}{7} =$

b. $\frac{12}{37} + \frac{11}{15} =$

c. $\frac{15}{21} - \frac{1}{3} =$

d. $\frac{4}{16} - \frac{15}{3} =$

e. $\frac{7}{25} \cdot \frac{12}{25} =$

f. $\frac{8}{38} \cdot \frac{25}{16} =$

g. $\frac{18}{30} \div \frac{3}{46} =$

h. $\frac{24}{36} \div \frac{8}{12} =$

2. Resuelve las siguientes situaciones problema relacionadas con regla de tres simple.

   a. Ayer 4 camiones que expenden leche transportaron cierta cantidad de cantinas desde el campo hasta la ciudad. Hoy 6 camiones, iguales a los de ayer, tendrán que hacer 12 viajes para transportar la misma cantidad de cantinas desde el campo hasta la ciudad. ¿Cuántos viajes tuvieron que hacer ayer los camiones?

   b. Para realizar el mantenimiento de una piscina se requiere de 420 extracciones de agua con balde de 24 litros de capacidad. Si el balde es de 40 litros, ¿cuántas extracciones se necesitarán para desocupar totalmente la piscina?

3. Resuelva los siguientes problemas relacionados con porcentaje

   a. Un padre de familia paga por la educación de su hijo $ 600.000 mensuales. Si el pago que realiza mensualmente equivale al 24 % de su salario. ¿Cuál es el salario devengado por el padre?

   b. Según estudios realizados, en un hospital materno, el número de nacimientos disminuyó en un 3 % respecto al año pasado. Si el año pasado nacieron 540 bebés, ¿cuántos bebés nacieron este año?

   c. Camilo desea comprar una bicicleta en un almacén de cadena que cuesta $ 230.000. Debe pagar 16 % más de impuesto de IVA. ¿Cuánto pagará Camilo en total?

Estructuración de saberes

En muchas situaciones de nuestro entorno nos preguntamos cómo hacer rendir nuestro dinero para obtener algún beneficio que nos permita mejorar nuestra calidad de vida. Es aquí cuando las matemáticas financieras intervienen de forma asertiva, ya que a partir de los diferentes temas que la abordan podemos utilizarlos para alcanzar algún beneficio.

La siguiente unidad pretende que el estudiante comprenda los temas relacionados con interés simple, interés compuesto, ley de oferta y demanda y la depreciación, para que posteriormente, los pueda aplicar en su entorno.

¿Qué es un Bien?

Bien

En términos económicos, un bien es un elemento o conjunto de elementos que tiene como finalidad satisfacer alguna necesidad de las personas, el cual puede brindar utilidad, cuando el consumidor lo adquiera

Consumo Inteligente

Consumo inteligente

Podríamos decir que es pensar antes de comprar, tiene que ver con analizar detalladamente la mejor opción antes de realizar una compra.

Las características de un consumidor inteligente son:

- Comparar precios antes de comprar.
- Comprar lo necesario.
- Cuidar las cosas que se usan.

Gastos

Gasto

Gasto es la utilización o consumo de un bien o servicio a cambio de una contraprestación, se suele realizar mediante una cantidad saliente de dinero. También se denomina egreso.

Dicho con otras palabras, cuando tenemos un gasto o egreso, lo que hacemos es realizar una transacción enviando dinero a cambio de recibir un bien o servicio. Por ejemplo, el uso de luz o comprar comida

Ingresos

Ingresos

En términos generales, se puede definir como el conjunto de ganancias con respecto al presupuesto, ya sea en el sector público o privado, individual o grupal.

En otras palabras, hace referencia a lo monetario que se acumula y genera como consecuencia un círculo de consumo - ganancia.

Presupuesto

Presupuesto

Capital que se requiere para solucionar los gastos necesarios para la realización de un proyecto.

En otras palabras, es una cifra anticipada que se estima como coste para la realización de un objetivo.

Servicio

Servicio

Conjunto de acciones enfocadas a satisfacer las necesidades de los clientes, brindando un producto inmaterial y personalizado

Interés simple

Saberes previos

Interés simple

Interés: es una ganancia económica que recibe una entidad o una persona cuando hace un préstamo o se deposita dinero en una entidad financiera.

Para hallar el interés simple es necesario contar con los siguientes factores: un capital inicial, tasa de interés y el tiempo que dura el préstamo, a partir de la siguiente expresión matemática

$I = C \cdot r \cdot t$ de donde

$$C = \frac{I}{r \cdot t}$$

$$r = \frac{I}{C \cdot t}$$ finalmente

$$C = \frac{I}{r \cdot t}$$

a. El IVA es el impuesto del valor agregado que se cobra al consumidor y se aplica al comprar determinados artículos, que deben pagar un valor extra del 16 % sobre el valor inicial.

   Hallar el precio total que se paga por cada artículo:

   - Camisa $ 48.000.
   - Zapatos $ 78.000.
   - Computador $ 1.545.000.
   - Bicicleta $ 640.000.

b. Camila cumplió 23 años. ¿Cuántos meses, semanas y días ha vivido?

Ejercicios solucionados

a. Calcular el interés simple producido por $ 6.000.000 durante 60 días a una tasa de interés anual del 5 %.

Solución

En el desarrollo de estos tipos de problemas es conveniente tener en cuenta los siguientes aspectos:

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** C = $ 6.000.000

  t = 60 días = 60 / 365 = 0,164 años

  r = 5 % = 0,05

  I = ?

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

  $I = C \, . \, r \, . \, t$

  $I = 6000000 \, . \, 0{,}05 \, . \, 0{,}164$

  $I = \$49.200$

El interés que generan los $ 6.000.000 durante 60 días a una tasa de interes anual del 5 % es de $ 49.200.

b. Hallar el capital inicial que produjo un interés de $ 34.200 al cabo de 6 meses a una tasa de interés del 9,5 % anual.

Solución

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema, estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** C = ?

  t = 6 = 6 / 12 = 0,5 años

  r = 9,5 % = 0,095

  I = $ 34.200

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

$$C = \frac{I}{r\ .\ t}$$

$$C = \frac{34.200}{0{,}095\ .\ 0{,}5} = \frac{34.200}{0{,}0475} = \$\ 720.000$$

El capital que produjo un interes de $ 34.200 al cabo de 6 meses a una tasa de interes del 9,5 % anual es de $ 720.000.

c. ¿Qué tiempo estuvo invertido un capital de $ 12.000.000, que al ser depositado a una tasa anual del 9 %, obtuvo una ganancia de $ 1.600.000.

- **Interpretación:** Leer muy bien el problema, estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** Plantear el problema

  C = $ 12.000.000

  t = ?

  r = 9 % = 0,09

  I = $ 1.600.000

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

$$t = \frac{I}{C\ .\ r}$$

$$t = \frac{1.600.000}{12000000\ .\ 0{,}09} = \frac{1.600.000}{1.080.000} = 1{,}48 \text{ años}$$

El tiempo que estuvo invertido el capital de $ 12.000.000 con una tasa de interes anual del 9 % con ganancia de $ 1.600.000 fue de 1,48 años.

d. Felipe pidió un préstamo por $ 20.000.000. Al cabo del año, la deuda era de $ 22.400.000. ¿Cuál es la tasa de interés que le cobraron?

- **Interpretación:** Leer muy bien el problema, estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** Comprender muy bien el problema, estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

C = $ 20.000.000

t = 1 año

r = ?

I = Cf – Ci = $ 22.400.000 - $ 20.000.000 = $ 2.400.000

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución:

$$r = \frac{I}{C\,.\,r}$$

$$r = \frac{2.400.000}{20.000.000\,.\,1}$$

$$r = \frac{2.400.000}{20.000.000} = 0{,}12$$

$$r = 0{,}12\,.\,100\,\% = 12\,\%$$

La tasa de interés que le cobraron a Felipe por pedir un préstamo de $ 20.000.000 durante un año, para que generara un interés de $ 2.400.000 fue del 12 %.

Interés compuesto

Saberes previos

a. Traza un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones exponenciales a partir de una tabla de valores como la que se indica.

x	- 2	- 1	0	1	2
f(x)					

- $f(x) = 4^x$
- $g(x) = \left(\frac{7}{3}\right)^x$
- $f(x) = 0{,}1^{\,x}$
- $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

b. Evaluar cada expresión utilizando las propiedades de los logaritmos.

$Log_2 80 - Log_2 5$

$-\frac{1}{5} Log_3 27$

$\frac{Log_2 9}{Log_2 81}$

$Log\, 0{,}01 + Log\, 0{,}0001$

Interés compuesto

Es un conjunto que capitaliza los intereses que, hace que un valor que se paga por concepto de intereses, incremente mes a mes.

Dicho de otra manera, es aquel que se va sumando al capital inicial y sobre el que se van generando nuevos ingresos.

$$Vf = Vp\,(1+i)^n$$

Donde:

- Vf = Valor futuro
- Vp = Valor presente
- i = Tasa de interés
- n = periodo de tiempo

Para calcular el valor presente a partir de la fórmula sería igual a:

$$Vp = \frac{Vf}{(1+i)^n}$$

Para hallar n a partir de la fórmula sería igual a:

$$n = \frac{Log\,(\frac{Vf}{Vp})}{Log\,(1+i)}$$

Para hallar i a partir de la fórmula sería igual a:

$$i = \sqrt[n]{\frac{Vf}{Vp}} - 1$$

Ejercicios solucionados

a. Cuánto tiempo tiene que estar un capital de $ 2.500.000 a una tasa de interés del 2,5 % anual para que se conviertan en $ 3.200.000.

Solución. Tenga en cuenta las siguientes sugerencias para resolver este tipo de situaciones problema:

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema, estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** Comprender muy bien el problema, estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

$$Vp = \$\ 2.500.000$$

$$Vf = \$\ 3.200.000$$

$$i = 2,5\ \% = 0,025$$

$$n = ?$$

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

$$n = \frac{Log\left(\frac{Vf}{Vp}\right)}{Log\ (1+i)}$$

$$n = \frac{Log\left(\frac{3.200.000}{2.500.000}\right)}{Log\ (1+0,025)} = \frac{Log\ (1,28)}{Log\ (1,025)} = \frac{0,107}{0,010} = 10,7 \text{ años}$$

El tiempo que hay que invertir el capital de $ 2.500.000, para que se conviertan en $ 3.200.000 a una tasa de interes anual del 2,5 %, son 10,7 años.

b. Un prestamista inicia su negocio con un capital de $ 13.500.000 y en su proyecto desea prestar al 3 % mensual. ¿Qué capital tendrá al cabo de 3 años?

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** Comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

Vp = $ 13.500.000

Vf = ?

i = 3 % = 0,03

n = 3

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

$$Vf = Vp\,(1+i)^n$$

$$Vf = 13.500.000\,(1+0,03)^3$$

$$Vf = 13.500.000\,(1+0,03)^3$$

$$Vf = 13.500.000\,(1.03)^3 = \$14.751.814,5$$

El prestamista, al cabo al cabo de los tres años tendrá un capital de $ 14.751.814,5

c. ¿Cuál es el capital inicial que al 11 % anual durante 12 años produce un capital final de $ 5.000.000?

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.
- **Formulación:** Comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

Vp = ?

Vf = $ 5.000.000

i = 11 % = 0,11

n = 12

- **Realizar lo formulado**: Es decir realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

$$Vp = \frac{Vf}{(1+i)^n}$$

$$Vp = \frac{5.000.000}{(1+0,11)^{12}}$$

$$Vp = \frac{5.000.000}{(1.11)^{12}} = \frac{5.000.000}{3,5} = 1.428.571,43$$

El capital final es de $ 1.428.571,43

d. ¿Qué tasa de interés ha tenido una inversión de \$ 20.000.000 si al final de 5 años ha recibido \$ 35.000.000?

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** Comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

Vp = \$ 20.000.000

Vf = \$ 35.000.000

i = ?

n = 5

- **Realizar lo formulado**: Es decir realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

$$i = \sqrt[n]{\frac{Vf}{Vp}} - 1$$

$$i = \sqrt[5]{\frac{35.000.000}{20.000.000}} - 1$$

$$i = \sqrt[5]{1.75} - 1 = 1{,}11 - 1 = 0{,}11 = 11\%$$

La tasa de interes es igual a 11 %.

Ley de oferta y ley de demanda

A menudo escuchamos en los supermercados ofertas de artículos, debido a la demanda de los mismos; por eso, en la actualidad son conceptos de gran ayuda para los seres humanos a la hora de tomar una decisión al realizar una compra.

Saberes previos

a. Teniendo en cuenta cada par de puntos. Hallar la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos.

- A (4,-6) y B (8,2)
- M (1,6) y N (3,4)

- T (3,-3) y U (2,6)
- S (3/5, 7/4) y W (2/3, 5/4)

b. Determine la ecuación de la recta punto pendiente para cada caso.

- m = 4 y C (3,5)
- m = -3 y D (-4,5)
- m = 6 y T (2,4)
- m = 3/2 y W (-3,-5)

c. Determine la ecuación de la recta punto-punto para cada caso.

- A (7,-1) y B (2,6)
- C (-9,-5) y D (3,-3)
- H (10,11) I (-5,-4)

¿Qué es la oferta?

Oferta

Hace referencia con la cantidad de bienes que una empresa pone a disposición de los consumidores o público en general.

Por otro lado, la ley de la oferta relaciona la cantidad ofrecida de un bien y su precio de venta en el mercado.

¿Qué es la demanda?

Demanda

Establece que, manteniendo todo constante, cuando el precio de un producto aumenta, la cantidad demandada baja; asimismo, cuando el precio del producto baja, la cantidad demandada aumenta.

Por otro lado, la ley de la demanda refleja la relación entre la demanda que existe de un bien en el mercado y la cantidad del mismo que es ofrecido con base al precio que se establezca.

Fuente: https://es.khanacademy.org/economics-finance-domain/microeconomics/supply-demand-equilibrium/demand-curve-tutorial/a/law-of-demand

Problemas de aplicación

a. Las funciones de oferta y demanda de mercado de un artículo son:

$$X^0 = 300\,P - 600$$

$$X^d = 125.400 - 600P$$

Se pide:

- Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.
- Qué pasaría si P = 170 y P = 110.
- Realiza la representación gráfica de las situaciones.

Solución

Primer paso

- **Interpretación:** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** Comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

  - Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.
  - ¿Qué pasaría si P = 170 y P = 110?
  - Realiza la representación gráfica de las situaciones.

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

Resolución del problema: igualamos las funciones de oferta y demanda, para determinar el precio de equilibrio.

$$300\,P - 600 = 125.400 - 600\,P$$

$$300\,P + 600P = 125.400 + 600$$

$$900P = 126.000$$

$$P = \frac{126.000}{900} = 140\ u.m$$

Ahora, se sustituye el valor del precio de equilibrio tanto en la función de oferta como en la de demanda, para comprobar que da el mismo resultado.

X^0 = 300 (170) - 600 = 42.000 - 600 = 41.400 *cantidad de oferta*

X^d = 125.400 - 600 (140) = 125.400 - 84.000

= 41.400 *cantidad de demanda*

La cantidad de equilibrio es 41.400

Segundo paso

- Para P = 170, tenemos:

X^0 = 300P - 600

X^0 = 300 (170) - 600 = 51.000 - 600 = 50.400

X^d = 125.400 - 600 *P*

X^d = 125.400 - 600 (170) = 125.400 - 120.000 = 23.400

La cantidad de oferta es mayor que la cantidad de demanda, por tanto, se produce un exceso de oferta de 27.000.

- Para P = 110, tenemos:

X^0 = 300P - 600

X^0 = 300 (110) - 600 = 33.000 - 600 = 32.400

X^d = 125.400 - 600 *P*

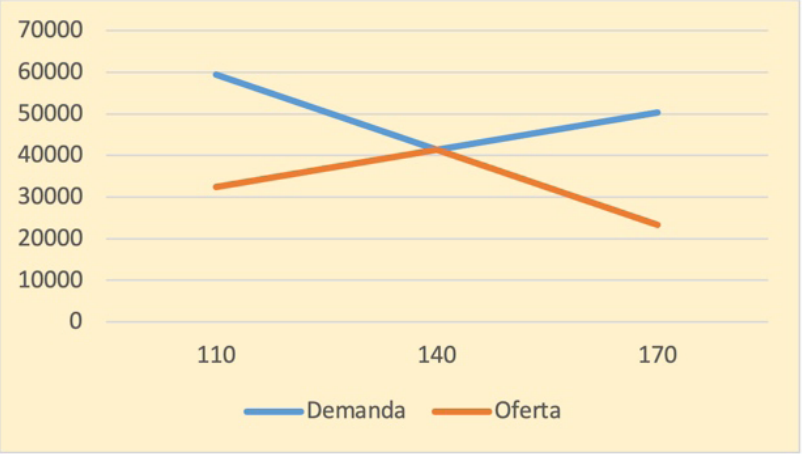
X^0 = 125.400 - 600(110) = 125.400 - 66.000 = 59.400

La cantidad de demanda es mayor que la cantidad de oferta, por tanto, se produce un exceso de demanda de $ 27.000.

Tercer paso

- Con los datos obtenidos construimos una tabla de valores y graficamos

Precio	Cantidad	
	Demanda	Oferta
110	59.400	32.400
140	41.400	41.400
170	50.400	23.400



b. El mercado de manzanas en el centro de abastos de la ciudad de Tunja, presenta las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$X^{0} = 20.000 + 500\,P$$

$$X^{d} = 100.000 - 300\,P$$

Se pide:

- Calcular el precio y la cantidad de equilibrio,
- Qué pasaría si P = 140 y P = 80.
- Realiza la representación gráfica de las situaciones.

Solución

Primer paso

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.
- **Formulación:** Comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

  - Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.
  - Qué pasaría si P = 140 y P = 80.
  - Realiza la representación gráfica de las situaciones .

- **Realizar lo formulado**: es decir realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

Resolución del problema: igualamos las funciones de oferta y demanda, para determinar el precio de equilibrio.

$$20.000 + 500\,P = 100.000 - 300\,P$$

$$500P + 300P = 100.00 - 20.000$$

$$800P = 80.000$$

$$P = \frac{80.000}{800} = 100 \;\; u\,.\,m$$

Ahora sustituimos el valor del precio de equilibrio tanto en la función de oferta como en la de demanda, para comprobar que da el mismo resultado:

$$X^0 = 20.000 + 500(100) = 70.000$$

$$X^d = 100.000 - 300(100) = 70.000$$

La cantidad de equilibrio es $ 70.000.

Segundo paso

- Para P = 140, tenemos:

$$X^0 = 20.000 + 500(140) = 90.000$$

$$X^d = 100.000 - 300(140) = 58.000$$

La cantidad de oferta es mayor que la cantidad de demanda, por tanto, se produce un exceso de oferta de $ 32.000.

- Para P = 80, tenemos:

$$X^0 = 20.000 + 500(80) = 60.000$$

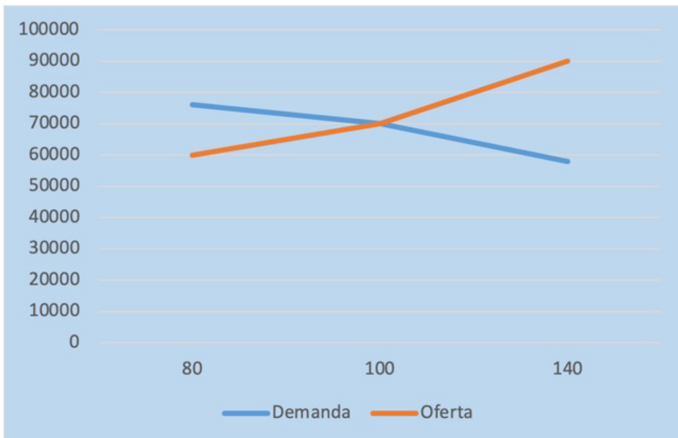
$$X^d = 100.000 - 300(80) = 76.000$$

La cantidad de demanda es mayor que la cantidad de oferta, por tanto, se produce un exceso de demanda de $ 16.000.

Tercer paso

Con los datos obtenidos construimos una tabla de valores y graficamos.

Precio	Cantidad	
	Demanda	**Oferta**
80	76.000	60.000
100	70.000	70.000
140	58.000	90.000



Depreciación

Depreciación

Hace referencia a una disminución que puede ser periódica de un bien material o inmaterial. Se puede dar por tres razones principales como son: el uso, el paso del tiempo y la vejez

Ejercicios solucionados

a. Una fábrica de textiles compró una máquina para hacer uniformes de dotación con un costo de $ 54.000.000; se estima que tendrá 5 años de vida útil y valor de rescate de $ 5.400.000. ¿Cuál es la depreciación anual?

Solución

- **Interpretación: l**eer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.
- **Formulación:** Comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

C = $ 54.000.000

S = $ 5.400.000

n = 5 años

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

Lo primero que calculamos es el valor de uso:

$$W = C - S = 54.000.000 - 5.400.000 = 48.600.000$$

A partir del valor de uso calculamos la depreciación anual:

$$R = \frac{W}{n} = \frac{48.600.000}{5} = 9.720.000$$

Significa que la máquina disminuirá su valor en $ 972.000 cada año durante sus 5 años de vida útil.

b. ¿Cuál es el valor de rescate que tendrá un equipo de sonido que cuesta $ 800.000 y que se deprecia en $ 120.000 anuales durante 6 años?

Solución

- **Interpretación:** leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

C = $ 800.000

R = $ 120.000

n = 6 años

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

Para este tipo de problemas existen dos formas para determinar el valor de rescate de un activo. En el primer método se utiliza la fórmula para calcular el valor en libros. En el segundo método se utilizan las fórmulas para calcular el valor de uso y la depreciación anual. Revisemos ambos métodos.

Método 1. (Fórmula de valor en libros). El valor de rescate corresponde al último valor en libros, cuando k = n es el tiempo de vida útil, por lo que se pueden sustituir los valores en la fórmula para calcular el valor en libros:

$$C_k = C - kR$$

$$S = C_6 = 800.000 - 6\ (120.000) = 80.000$$

Significa que el valor de rescate del equipo de sonidos después de 6 años es $ 80.000.

Método 2. (Fórmulas para el valor de uso y la depreciación anual). Primero se calcula el valor de uso (W) despejándolo de la fórmula para calcular la depreciación anual:

$$R = \frac{W}{n}$$

$$W = R\ .\ n = 120.000\ .\ 6 = 720.000$$

Se sustituyen los valores en la fórmula para calcular el valor de uso y se despeja el valor de rescate:

$$W = C - S$$

$$S = C - W = 800.000 - 720.000 = 80.000$$

Significa que el valor de rescate del equipo de sonidos después de 6 años es $ 80.000.

c. ¿Cuál es el tiempo de vida útil de un sofá cama con valor inicial de $ 1.620.000 y valor de rescate nulo al término de su vida útil, si el valor en libros a los 4 años es de $ 1.215.000?

Solución

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** Comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

$$C = \$\ 1.620.000$$

$$C_4 = \$\ 1.215.000$$

$$S = \text{nulo} = \text{cero}$$

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

Primero se determina el valor de la depreciación anual, despejándolo de la fórmula para calcular el valor en libros:

$$C_k = C - kR$$

$$C_4 = C - 4R$$

$$1.215.000 = 1.620.000 - 4R$$

$$4\ R = 1.620.000 - 121.500$$

$$R = \frac{405.000}{4} = 101.250$$

Determinado el valor de la depreciación anual, se sustituye en la fórmula para calcular la depreciación anual:

$$R = \frac{W}{n}$$

$$W = C - S = 1.620.000 - 0 = 1.620.000$$

Despejando *n* tenemos que:

$$n = \frac{W}{R} = \frac{1.620.000}{101.250} = 16 \text{ años}$$

La vida útil del sofá cama es de 16 años.

Utilidad

Utilidad

La utilidad es la medida de satisfacción por la cual los individuos valoran la elección de determinados bienes o servicios.

En su concepto más amplio, nos referimos a la utilidad como el interés o provecho que es obtenido del disfrute o uso de un bien o servicio en particular.

Fuente: https://economipedia.com/definiciones/utilidad.html

Costos

Costos

Es el valor monetario de los gastos de las materias primas, equipos, suministros, servicios, mano de obra, productos, entre otros, que se utilizan para la creación de un producto o servicio

Ejercicios solucionados

a. Una compañía de seguros produce al año 10.000 unidades de un bien, con unos costes fijos de \$ 15.000.000 y unos costes variables de \$ 25.000.000, sabiendo que cada unidad producida se vende a \$ 9.000, se pide:

- Calcular el coste por unidad o costo medio.
- Hallar el beneficio anual de la compañía y cuánto gana en cada unidad vendida.

Solución

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

Calcular el coste por unidad o coste medio.

- **Formulación:** Comprender muy bien el problema, estableciendo los datos conocidos y los desconocidos. Para responder esta pregunta es necesario recordar que:

- El coste total es la suma de los costes fijos más los variables:

Coste total (CT) = Costes fijos (CF) + Costes variables (CV)

- El coste por unidad es el resultado de dividir el coste total por el número de unidades producidas.

$$\text{Coste por unidad} = \frac{\text{Coste total (CT)}}{\text{N}^{o}\text{ de unidades producidas}}$$

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

Coste total (CT) = Costes fijos (CF) + Costes variables

Coste total (CT) = 15.000.000 +

Coste total (CT) =

$$\text{Coste por unidad} = \frac{40.000.000 \text{ um}}{10.000}$$

Coste por unidad = $ 4.000

Lectura comprensiva de la segunda pregunta:

- **Formulación:** comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

  - Hallar el beneficio anual de la compañía y cuánto gana en cada unidad vendida.

En esta pregunta se pide, en primer lugar, el beneficio total (beneficio anual) y, en segundo lugar, el beneficio unitario, por ello, es necesario recordar:

- Beneficio total = Ingresos – costes totales
- Ingresos totales = número de unidades vendidas x precio de venta
- Beneficio unitario = Precio de venta – coste medio unitario

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución:

Ingresos = unidades vendidas X *precio venta*

Ingresos = 10.000 X 9.000 = 90.000.000

Beneficio Total = Ingresos - CT

Beneficio Total = 90.000.000 - 40.000.000 *um* = 50.000.000

Beneficio unitario = precio - Cme

Beneficio unitario = 9.000 - 4.000 = 5.000 *um*

Función de costos

Función de costos

Es una relación matemática entre el nivel de producción y el costo económico que implica generarlo. Muestra los mínimos costes económicos asociados a cada nivel de producción (combinaciones de factores que tienen los costos más bajos)

Fuete: https://www.uco.es/~dh1lavif/INT_ECONOMIA/COSTOS.pdf

Ejercicios solucionados

a. El fabricante de cierto producto puede vender todo lo que produce al precio de $ 60 cada artículo. Al producir cada artículo, gasta $ 40 en materia prima y mano de obra, y tiene costos adicionales fijos de $ 3.000 a la semana en la operación de la planta.

Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de $ 1.000 a la semana.

Solución

- **Interpretación.** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.
- **Formulación:** comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos:

$$I(q) = 60q$$

$$C(q) = 40\,q + 3000$$

$$utilidad = Ingresos - costo$$

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

Sea q los artículos producidos y vendidos a la semana:

$$I(q) = 60q$$

$$C(q) = 40\,q + 3000$$

$$utilidad = Ingresos - costo$$

$$U(q) = 60q - (40q + 3.000)$$

$$1.000 = 60q - 40q - 3.000$$

$$1.000 + 30.000 = 20q$$

$$q = \frac{4000}{20} = 200 \text{ uniddes}$$

El fabricante debería vender y producir 200 unidades a la semana.

b. María elabora ciertas manualidades en cerámica. Ella sabe que para el próximo mes cuenta con un total de $ 2.350.000 para cubrir los gastos. Además, conoce que los costos por conceptos de recibos, alquiler del local y, otros, es de $ 550.000 y los costos por cada unidad producida es de $ 10.000. Según la información, ¿cuántas unidades podrá producir?

Solución

- **Interpretación:** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

- **Formulación:** comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

C_T = \$ 2.350.000

C_F = \$ 550.000

C_V = \$ 10.000

Q = ?

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución.

$$C_T = C_V q + C_F$$

$$2.350.000 = 10.000\, q + 550.000$$

$$2.350.000 - 550.000 = 10.000\, q$$

$$1.800.000 = 10.000\, q$$

$$q = \frac{1.800.000}{10.000} = 180 \text{ uniddes}$$

Bajo las condiciones dadas, María puede producir 180 unidades.

c. En una empresa se venden *q* unidades al mes a un precio de \$ 7.250. Además, se conoce que la función de costos está dada por el siguiente criterio:

$$C(q) = 3.750q + 280.000$$

- Determine el ingreso si se venden 124 unidades.
- Determine la cantidad de unidades que deben producir y vender para que la utilidad mensual sea \$ 1.050.000.

Solución

- **Interpretación:** Leer muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.
- **Formulación:** comprender muy bien el problema estableciendo los datos conocidos y los desconocidos.

Ingreso $I\,(q) = p \,.\, q$

$I\,(q) = 7250 \,.\, q$

$I\,(124) = 7250 \,.\, (124) = 899.000$

Costo total $C\,(q) = 3750\, q + 280.000$

utilidad = Ingresos - costos

- **Realizar lo formulado**: es decir, realizar las operaciones necesarias. Emplear la fórmula adecuada para encontrar la solución:

Ingreso $I\,(q) = p\,.\,q$

$I\,(q) = 7.250\,.\,q$

$I\,(124) = 7.250\,.\,(124) = 899.000$

Costo total $C\,(q) = 3.750\,q + 280.000$

utilidad = Ingresos - costos

$1.050.000 = 7.250\text{ q} - 3.750\text{ q} - 280.000$

$1.050.000 + 280.000 = 3.500\text{ q}$

$$q = \frac{1.330.000}{3.500} = 380 \text{ uniddes}$$

Para que la empresa tenga una utilidad mensual de $ 1.050.000 debe elaborar y vender 380 unidades.

Ejercicios de práctica

Actividad Individual

I. **Resuelve los siguientes problemas relacionados con interés simple.**

1. Luis pide un préstamo de $ 10.000.000 al banco por 3 meses. El interés aplicado es del 1,2 % mensual. ¿Cuánto debe pagar Luis por concepto de intereses en los 3 meses?

2. ¿Qué capital producirá un interés de $ 34.200 al cabo de 6 meses, a una tasa del 9 %?

3. Determine el tiempo que estuvo invertido un capital de $ 12.000.000, que al ser depositado con una tasa anual del 9 % obtuvo una ganancia de $ 1.600.000.

4. Fernando pide un préstamo de $ 40.000.000. Al cabo de un año la deuda asciende a $ 44.800.000. ¿Cuál es interés que le cobraron?

II. **Resuelve las siguientes situaciones relacionadas con interés compuesto.**

1. ¿Cuánto tiempo tiene que estar un capital de $ 5.000.000 a una tasa de interés del 2,5 % anual para que se convierta en $ 6.400.000?

2. ¿Qué tasa de interés ha tenido una inversión de $ 200.000.000 si al final de 5 años ha recibido $ 350.000.000?

3. ¿Cuál es el capital inicial que al 5,5 % anual durante 10 años produce un capital final de $2.500.000?

4. ¿Cuál es el capital final de $ 2.500.000 que generan unos intereses de $ 2.100.000 después de 3 años?

III. **Resuelve los siguientes problemas relacionados con oferta y demanda.**

1. Las ecuaciones de oferta y demanda de mercado de un artículo son

$$X^0 = 150\,P - 300$$
$$X^d = 62.700 - 300P$$

Se pide:

- Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.
- Qué pasaría si P = 85 y P = 55.
- Realiza la representación gráfica de las situaciones.

2. El mercado de naranjas en el centro de abastos de la ciudad de Medellín, presenta las funciones de oferta y demanda así:

$$X^0 = 10.000 + 250P$$
$$X^d = 50.000 - 150P$$

Se pide:

- Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.
- Qué pasaría si P = 70 y P = 40.
- Realiza la representación gráfica de las situaciones.

IV. **Resuelve las siguientes situaciones problema relacionadas con depreciación.**

1. Una firma constructora adquiere una máquina que tiene vida útil de 10 años y valor de $ 400.000.000. El valor de rescate de dicha máquina al término de su vida útil es de $ 80.000.000, ¿cuál es la depreciación anual?

2. ¿Cuál es la vida útil de una máquina utilizada en la confección que costó $ 3.000.000, si el cargo anual por depreciación es de $ 180.000 y el valor de rescate es de $ 1.560.000?

3. ¿Cuál es el valor de rescate después de 5 años de una sala, cuyo precio inicial es de $ 2.400.000 y que se deprecia en $ 80.000 anuales?

V. **Resuelve lo siguientes problemas relacionados con utilidad y función de costo.**

1. Una compañía elabora un producto para el cual el costo por unidad es de $ 6 y el costo fijo de $ 80.000. cada unidad tiene un precio de venta de $ 10. Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de $ 60.000.

   Una empresa fabrica un artículo que tiene costos variables de $ 3 por unidad. Si los gastos fijos son $ 75.000 y cada artículo se vende en $ 5, ¿cuántas unidades se deben producir y ofertar para que la empresa logre una utilidad de $ 40.000?

2. Una fábrica de cajas de cartón tiene costos fijos de $ 5.223 y los costos de producción de una caja son $ 1,15. Si se vende cada caja en $ 3,35.

   a. Escriba la función de ganancia.

   b. ¿Cuántas cajas necesita vender para que el beneficio sea positivo?

Actividad grupal

I. **Resuelve los siguientes problemas relacionados con interés simple.**

1. Sonia pide un préstamo de $ 20.000.000 al banco por 4 meses. La tasa de interés es del 1,5 % mensual. ¿Cuánto debe pagar Luis por concepto de intereses en los 4 meses?

2. ¿Qué capital produce un interés de $ 68.400 al cabo de 6 meses, a una tasa del 9 %?

3. Determine el tiempo que estuvo invertido un capital de $ 6.000.000, que al ser depositado con una tasa anual del 9 % obtuvo una ganancia de $ 800.000.

4. Juan pide un préstamo de $ 20.000.000. Al cabo de un año la deuda asciende a $ 22.400.000. ¿Cuál es la tasa de interés que le cobraron?

II. **Resuelve los siguientes problemas relacionados con interés simple.**

1. ¿Cuánto tiempo tiene que estar un capital de $ 5.000.000 a una tasa de interés del 2,5 % anual para que se conviertan en $ 6.400.000?

2. Un prestamista inicia su negocio con un capital de $ 27.000.000 y en su proyecto desea prestar al 4 % mensual. ¿Qué capital tendrá después de 5 años?

III. **Resuelve.**

1. Las ecuaciones de oferta y demanda de mercado de un artículo son:

$$X^0 = 900\,P - 1.800$$

$$X^d = 254.000 - 600P$$

Se pide:

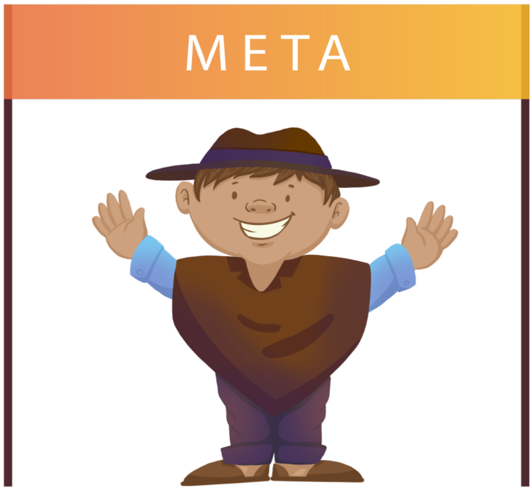
- Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.
- ¿Qué pasaría si P = 150 y P = 100?
- Realiza la representación gráfica de las situaciones.

IV. **Resuelve.**

1. ¿Cuál es el valor de rescate de una máquina que costó $ 15.000.000, con una vida útil de 5 años, si el cargo anual por depreciación es de $ 900.000?

V. **Elabora un proyecto con tus compañeros donde aplique los conceptos de utilidad y función de costo.**

Prepárate para Saber Pro

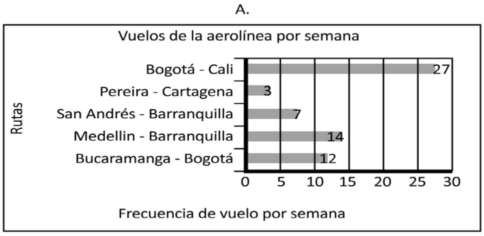


1. En la tabla se presentan las ciudades de origen, el destino y la frecuencia de algunos de los vuelos ofrecidos por una aerolínea, semanalmente.

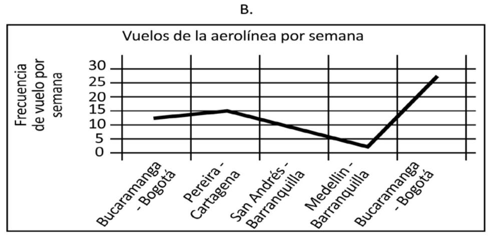
Origen	Destino	Frecuencia (por semana)
Bucaramanga	Bogotá	12
Medellín	Barranquilla	14
San Andrés	Barranquilla	7
Pereira	Cartagena	3
Bogotá	Cali	27

La gráfica que mejor representa la información registrada en la anterior tabla es:

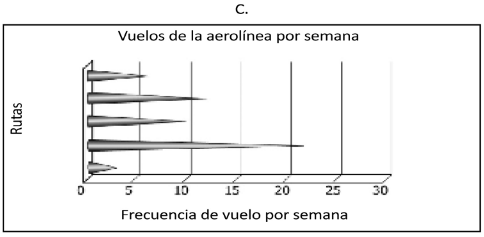
A.



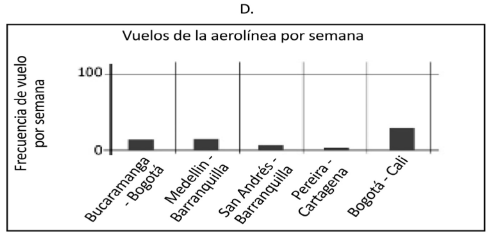
B.



C.



D.



Fuente: https://prezi.com/tm0ldujxbx23/49-en-la-tabl-ase-presenta-las-ciudades-de-origen-el-dest/

2. Se encuestó a un grupo de personas, de diferentes edades, sobre el dinero que gastaron en transporte público en el último mes.

Nombre	Edad	Dinero gastado
Juana	20	$ 25.000
Steven	23	$ 28.000
Andrés	24	$ 31.000
Ana	25	$ 35.000
Camilo	31	$ 38.000
Sandra	34	$ 40.000
Anderson	40	$ 45.000

A partir de la información suniestrada, la edad de estas personas y el dinero que gastaron en transporte público están correlacionados, porque:

A. Las personas menores de 30 años gastan menos dinero.

B. A mayor edad más dinero se invierte en transporte y viceversa.

C. A menor edad más dinero se invierte en transporte y viceversa.

D. Las personas mayores de 30 años gastan más dinero.

3. Se registra el número de estudiantes admitidos en relación con la cantidad de inscritos en algunas universidades de Colombia.

Universidad	Admitidos
Unimariana	1 de cada 30
Los Andes	3 de cada 20
El Bosque	12 de cada 20
UPTC	13 de cada 30

¿En cuál de las universidades mencionadas, un estudiante tiene mayor probabilidad de ser admitido?

A. Unimariana.

B. Los Andes.

C. El Bosque.

D. UPTC.

4. Suponga que se necesita 1 L de pintura por cada 6 m^2 de área de superficie, cuando se pinta un puente metálico. Las secciones metálicas del puente tienen un área aproximada de 480.000m^2. ¿Cuánta pintura se necesita para pintar las secciones metálicas del puente?

    A. 40.000 L

    B. 80.000 L

    C. 100.000 L

    D. 3.000.000 L

5. Los balones de fútbol y baloncesto de una escuela deportiva suman 40 en total. Se sabe que hay 2 balones de baloncesto por cada 3 balones de fútbol. ¿Cuántos hay en cada uno?

    A. 5 de baloncesto y 35 de fútbol.

    B. 16 de baloncesto y 24 de fútbol.

    C. 24 de baloncesto y 16 de fútbol.

    D. 80 de baloncesto y 120 de fútbol.

6. En un grupo de amigos cada uno pesaba 70 kg. Decidieron hacer una dieta diferente cada uno, para saber cuál era mejor. Pedro hizo la dieta del apio y 7días después pesaba 69. 88 kg; Hugo hizo la de la cebolla y 5 días después pesaba 69.91 kg; Sandra hizo la del perejil y a los 11 días pesaba 69.86 kg; y Luisa hizo la del tomate y a los 9 días pesaba 69.87 kg. Según esto, la dieta más efectiva fue:

    A. Apio.

    B. Cebolla.

    C. Tomate.

    D. Perejil.

Capítulo 4

Estadística básica

Estadística descriptiva

Distribución de frecuencias para datos agrupados y no agrupados

- ¿Qué es redondeo?
- Distribución de frecuencias datos no agrupados.
- Distribución de frecuencias datos agrupados.
- Problemas de aplicación.

Media, moda, mediana, medidas de dispersión y posición

- Media, moda y mediana tendencia para datos no agrupados.
- Media, moda y mediana para datos agrupados.
- Problemas de aplicación.
- Medidas de dispersión.
- Medidas de posición.

Propósito

El propósito de esta quinta unidad es lograr en los estudiantes, la motivación necesaria para que inicie su proceso de formación del conocimiento en matemáticas, con un tema importante como es la estadística descriptiva, temáticas que le proporcionarán herramientas que lo lleven a analizar, proponer y realizar situaciones propias de esta área del saber en una forma más eficiente y sencilla.

Resumen

En esta quinta unidad se tratarán los temas asociados a la estadística descriptiva, en donde se mirarán aspectos importantes como: redondeo, distribución de frecuencias para datos no agrupados y datos agrupados. Así mismo, lo referente a la media, moda, mediana, medidas de dispersión y medidas de posición, que le permitirán resolver situaciones de su cotidianidad y, que a futuro, pueden ser aplicadas en la investigación, puesto que hoy en día se requiere la formación investigativa a nivel profesional.

Competencias

Comunicación

- Expresa situaciones suficientes en donde aplica los conceptos básicos de la estadística descriptiva y sus diferentes aplicaciones en la vida cotidiana.

Razonamiento

- Interpreta y utiliza la estadística descriptiva en diferentes contextos para mostrar las relaciones entre la media, moda y mediana y mediadas de dispersión.
- Resuelve situaciones problema relacionadas con distribución de frecuencias para datos agrupados y no agrupados de forma correcta.

Solución de problemas

- Utiliza situaciones asociadas con un contexto a partir de la estadística descriptiva.
- Soluciona situaciones problema de un contexto determinado con distribución de frecuencias, medidas de tendencia central, medidas de dispersión y medidas de posición.

Aprendizajes

- Utilizar la lógica matemática para razonar y explorar las relaciones entre la media, moda, mediana y las medidas de dispersión en situaciones propias de su cotidianidad.
- Emplear diferentes modelos y estrategias didácticas en la solución de situaciones matemáticas que requieran el uso de la estadística descriptiva.
- Utilizar los diferentes tipos de frecuencias estadísticas y herramientas didácticas en la solución de situaciones matemátizables del contexto.

Estadística descriptiva

Saberes previos:

1. Resuelve las siguientes potencias

a. $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} =$

b. $\dfrac{7^6}{7^2} =$

c. $\left[(9)^3\right]^2 =$

d. $(6)^0 =$

e. $\dfrac{3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^6}{3^2} =$

f. $\dfrac{6^2 \cdot 6^0 \cdot 6^3}{2^2 \cdot 2^3} =$

g. $\dfrac{3^3 \cdot 3^1 \cdot 3^{-2}}{2^3 \cdot 2^2} =$

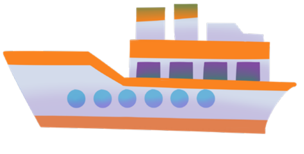
h. $\dfrac{7^2 \cdot 7^0 \cdot 7^3}{3^2 \cdot 3^3} =$

2. Exprese en notación científica las siguientes masas medidas en kilogramos.

a. Masa del sol

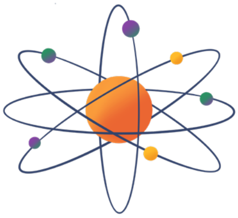
Masa = 2000000000000000000000000000000 Kg

b. Masa de un barco



Masa = 10000000000 Kg

c. Masa del átomo



Masa = 0,000000000000000000001

d. Masa de un toro

Masa = 780 Kg

e. Masa de la tierra

Masa = 5970000000000000000000000

Estructuración de saberes

En muchas situaciones de la cotidianidad nos preguntamos cómo podemos interpretar las facturas de los servicios públicos para saber si realmente nos están cobrando lo justo, y cómo podríamos tener control acerca del consumo de cada mes, y así mejorar nuestras finanzas. Es aquí, cuando la estadística descriptiva juega un papel importante, ya que a partir de los diferentes temas que la abordan, podemos utilizarlos para alcanzar algún beneficio.

La siguiente unidad pretende que el estudiante comprenda los temas relacionados con distribución de frecuencias, media, moda mediana, medidas de dispersión y posición, para que, posteriormente, los pueda aplicar en su entorno.

¿Qué es redondeo?

Redondeo

Es un proceso matemático que permite modificar un número o dígito hasta alcanzar un valor que se pueda considerar como determinado. El redondeo pude ser por exceso o defecto.

Por exceso cuando la cifra decimal está comprendida entre 5 y 9 se aproxima a la siguiente cifra significativa y, por defecto, cuando la cifra decimal esta entre 0 y 4.

Ejercicios de afianzamiento

Utilice el redondeo por exceso o defecto en los siguientes ejercicios:

a. 2002.5, expresado sin ningún decimal.
b. 913.009, expresado con un decimal.
c. 313.948, expresado con dos decimales.
d. 31.13, expresado con un decimal.
e. 0.94, expresado sin ningún decimal.
f. 88.19, expresado con un decimal.
g. 777.77777777, expresado sin ningún decimal.
h. 304.698, expresado con dos decimales.
i. 32.49, expresado con un decimal.
j. 617.824917, expresado con cuatro decimales.

¿Qué es distribución de frecuencias?

Distribución de frecuencias

Son tablas que permiten organizar información acerca de un análisis estadístico a partir de las diferentes clases de frecuencias como la frecuencia absoluta, frecuencia acumulada y la frecuencia relativa.

Se puede realizar para datos no agrupados y datos agrupados.

Distribución de frecuencias para datos no agrupados

Distribución de frecuencias datos no agrupados

Los datos no agrupados, en estadística, son aquellos que, una vez recolectados, no se han clasificado y que pueden surgir de variables cualitativas o cuantitativas.

Frecuencia absoluta: se relaciona al número de veces que se repite un dato en particular.

Frecuencia acumulada: se obtiene de sumar sucesivamente las frecuencias absolutas o relativas, desde el menor al mayor de sus valores.

Frecuencia relativa: es una medida estadística que resulta del cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos de una población.

Ejercicio solucionado

En una reconocida universidad de Colombia se entrevistaron 40 estudiantes de la licenciatura en educación física. La oficina de bienestar estudiantil adelanta una campaña para saber el peso de estos estudiantes, con el objetivo de prevenir el sobrepeso; se obtuvo los siguientes resultados.

66	61	63	70	70
70	69	78	80	80
69	74	66	66	68
60	69	78	64	63
65	70	78	66	70
64	73	80	70	70
64	77	80	68	69
80	78	65	65	70

Aplique una distribución de frecuencias y represente la información en un polígono de frecuencias y un histograma.

Pasos

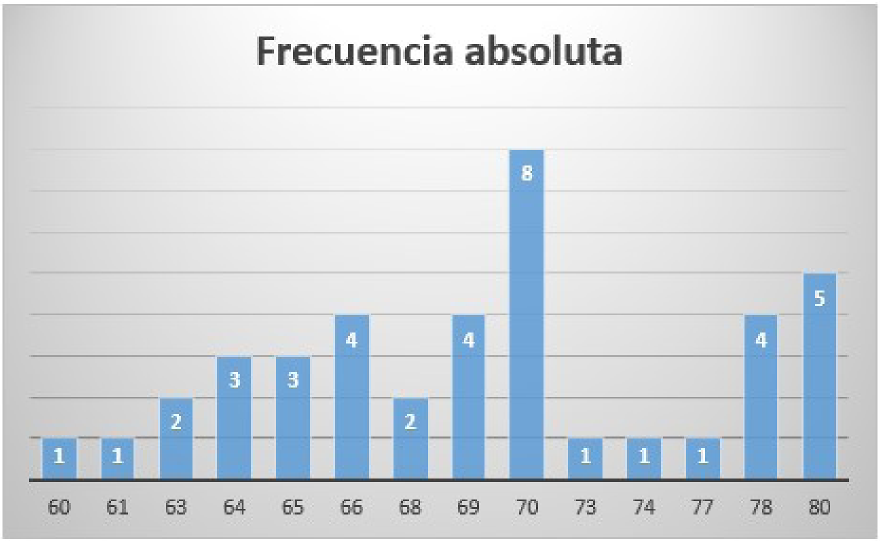
1. Organice la información de forma ascendente o viceversa:

60	61	63	63	64
64	64	65	65	65
66	66	66	66	68
68	69	69	69	69
70	70	70	70	70
70	70	70	73	74
77	78	78	78	78
80	80	80	80	80

2. Realice la distribución de frecuencias y represéntela gráficamente

Peso (kg)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia relativa porcentual
60	1	1	0.025	0.025	2.5 %
61	1	2	0.025	0.05	2.5 %
63	2	4	0.05	0.1	5 %
64	3	7	0.075	0.175	7.5 %
65	3	10	0.075	0.25	7.5 %
66	4	14	0.1	0.35	10 %
68	2	16	0.05	0.4	5 %
69	4	20	0.1	0.5	10 %
70	8	28	0.2	0.7	20 %
73	1	29	0.025	0.725	2.5 %
74	1	30	0,025	0.75	2.5 %
77	1	31	0.025	0.775	2.5 %
78	4	35	0.1	0.875	10 %
80	5	40	0.125	1	12.5 %
Totales	40				100 %

3. Se representa la información en un polígono de frecuencias o en un histograma:



Ejercicios propuestos

Para cada una de los problemas realice una distribución de frecuencias.

1. Autos Boyacá registra la cantidad de camionetas Tucson i35 vendidas en cada día del mes de agosto.

   1; 2; 4; 2; 4; 1; 6; 4; 8; 1; 8; 4; 2; 1; 6; 1; 1; 6; 8; 4; 1; 2; 2; 6; 1; 2; 4; 2; 4; 6.

2. Las calificaciones de 36 estudiantes de estadística descriptiva de la licenciatura en educación básica primaria de la facultad de estudios a distancia (FESAD) de la UPTC de Tunja, son las siguientes:

4.5	3.6	37	3.4	3.0	3.0	3.0	3.5	3.5
4.5	4.6	4.6	4.7	4.8	4.8	4.8	5.0	5.0
3.3	3.4	3.4	3.4	3.3	3.2	3.2	3.1	3.0
3.7	4.7	4.4	4.5	4.4	4.0	4.0	4.1	4.9

3. En una feria gastronómica patrocinada por Bienestar Universitario de la seccional Duitama de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, se realizó una encuesta a 40 estudiantes acerca de la comida de su preferencia entre 6 platos que oferta el restaurante estudiantil. Los datos se registran en la siguiente tabla:

Espaguetis	Arroz chino	Arroz atollado	Lasaña	Sancocho	Arroz chino	Lasaña	Lasaña
Arroz atollado	Arroz atollado	Arroz atollado	Espaguetis	Sancocho	Sancocho	Sancocho	Sancocho
Arroz atollado	Arroz chino	Lasaña	Sancocho	Arroz chino	Espaguetis	Arroz chino	Lasaña
Espaguetis	Sancocho	Lasaña	Sancocho	Sancocho	Lasaña	Arroz chino	Arroz chino
Arroz atollado	Lasaña	Sancocho	Espaguetis	Lasaña	Espaguetis	Arroz chino	Arroz chino

Distribución de frecuencias para datos agrupados

Distribución de frecuencias datos agrupados

Rango: es un valor numérico que se obtiene al restar el valor máximo de una serie de datos con el valor mínimo de la misma.

Ley de Sturges: la regla de Sturges es una regla que sirve para calcular el número de clases o intervalos idóneos en los que se debe dividir un conjunto de datos.

Distribución de frecuencias datos agrupados

Amplitud: hace referencia al cociente entre el rango y el número de intervalos.

Marca de clase: es el punto medio del intervalo de la clase, se denota por su valor, es obtenido al promediar los extremos del intervalo.

Limites reales: los límites reales se reconocen cuando el límite superior de una clase es igual al límite inferior de la clase contigua.

Ojivas: es una gráfica que se relaciona con la distribución de frecuencias que permite ver cuántos datos están por encima o por debajo de ciertos valores.

Ejercicio solucionado

A 40 estudiantes del colegio del municipio de Ramiriquí - Boyacá se les pidió que estimen el número de horas que habrían dedicado a estudiar la semana pasada (tanto en clase como fuera de ella), obteniéndose los siguientes resultados

36	30	47	60	32	35	40	50
54	35	45	52	48	58	60	38
32	35	56	48	30	55	49	39
58	50	68	35	56	47	37	56
58	50	47	58	55	39	58	45

Solución

1. Organice los datos en forma ascendente o descendente en una tabla para mayor comodidad.

30	30	32	32	35	35	35	35
36	37	38	39	39	40	45	45
47	47	47	48	48	49	50	50
50	52	54	55	55	56	56	56
58	58	58	58	58	60	60	68

2. Determine el rango:

$$R = X_{max} - X_{min} = 68 - 30 = 38$$

3. Aplique la ley de Sturges para encontrar el número de intervalos:

$$m = 1 + 3.3 \log N = 1 + 3.3 \log 40 = 1 + 3{,}52 = 6{,}28 = 7$$

4. Se calcula la amplitud:

$$A = \frac{R}{m} = \frac{38}{7} = 5.42 = 6$$

5. Se encuentra el valor del nuevo rango:

$$NR = mxA = 6 \text{ x } 7 = 42$$

6. Se determinan los límites reales:

$$LR = \frac{NR - R}{2} = \frac{42 - 38}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$Lim_{\ inferior} = 30 - 2 = 28$$

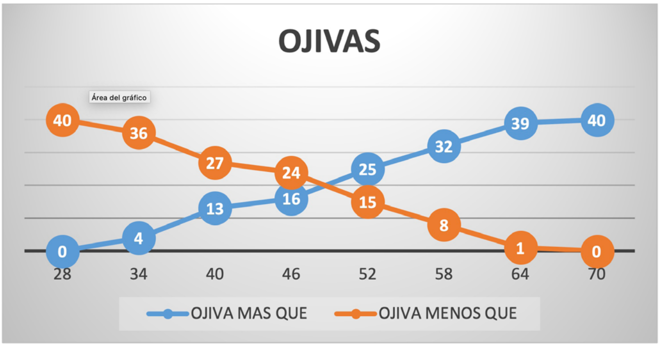
$$Lim_{\ superior} = 68 + 2 = 70$$

7. Construimos la distribución de frecuencias

Intervalo	fi	Xi	FA	Fr	Fra	Fr%
[28-34)	4	31	4	0,1	0,1	10%
[34-40)	9	37	13	0,225	0,325	22,5%
[40-46)	3	43	16	0,075	0,4	7,5%
[46-52)	9	49	25	0,225	0,625	22,5%
[52-58)	7	55	32	0,175	0,8	17,5%
[58-64)	7	61	39	0,175	0,975	17,5%
[64-70)	1	67	40	0,025	1	2,5%
TOTAL	40					100%

8. Construimos la tabla de las ojivas

Intervalo	Ojiva más Que	Ojiva menos Que
28	0	40
34	4	36
40	13	27
46	16	24
52	25	15
58	32	8
64	39	1
70	40	0



Ejercicios propuestos

1. Para la siguiente situación: las horas de dedicación al proyecto de investigación en el colegio José Ignacio de Márquez del municipio de Ramiriquí, por parte de los 55 estudiantes de básica está distribuida de la siguiente forma: 62 44 42 39 37 32 30 47 58 40 58 50 43 30 41 52 37 43 46 44 57 49 41 43 42 36 52 49 64 45 46 43 37 38 54 46 36 45 47 45 45 51 40 52 38 42 40 50 46 57 46 47 54 55 53 52 42 43 50 51.

2. En la biblioteca de la universidad se cuenta con cinco estantes para organizar los libros, de tal forma que los más pesados se ubiquen en los estantes inferiores y los más livianos en la parte superior. Andrés, el encargado, debe presentar un informe que permita conocer la cantidad de libros que hay en la biblioteca de acuerdo con su peso. ¿Cómo puede presentar el reporte?

PEDO DE LOS LIBROS EN GRAMOS	NUMERO DE LIBROS
[50-100)	20
[100-150)	33
[150-200)	23
[200-250)	18
[250-300)	18
[300-350)	19
TOTAL	131

3. Es necesario realizar un análisis del peso de los estudiantes de grado quinto de primaria de una institución educativa, con el objetivo de verificar el grado de nutrición de los educandos y así poder tener una información actualizada para el proceso de alimentación escolar. Al ejecutar el proceso de pesaje a 40 estudiantes, se obtuvo los siguientes datos:

8	70	92	85	52
56	63	70	68	58
60	72	69	82	76
67	76	61	55	57
47	74	71	65	72
70	67	79	88	67
70	55	68	71	45
67	60	75	74	65

Media, moda y mediana para datos no agrupados

Media, moda y mediana datos no agrupados

La media, moda y mediana son parámetros estadísticos que nos permiten obtener información acerca de la muestra o población en estudio.

Media: se considera como un promedio del conjunto de datos y se obtiene sumando todos los valores, dividido en el total de datos.

Moda: es el dato que más se repite en un análisis estadístico.

Mediana: es un valor de posición central que permite dividir en dos la distribución.

Cuando el número de datos es par:

M= (n+1) /2

Cuando el número de datos es impar:

La mediana es la puntuación central de la misma.

Ejercicio solucionado

En el examen de matemáticas de 30 estudiantes de la escuela rural de Rupabita se dieron los siguientes resultados, sabiendo que la calificación es de 0.0 a 5.0, 10 estudiantes sacaron 5.0, 12 educandos obtuvieron una nota de 4.0, 5 de 4,5 y 3 una nota de 3,5. Determine la media, moda y mediana.

1. Ordenar los datos de forma descendente:

5	5	5	5	5
5	5	5	5	5
4.5	4.5	4.5	4.5	4.5
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
4	4	3.5	3.5	3.5

Media

$$x = \frac{5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+4.5+4.5+4.5+4.5+4.5+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+3.5+3.5+3.5}{20}$$

$$X = \frac{131}{30} = 4.4$$

Moda

Mo = 4 puesto que es el dato con mayor frecuencia absoluta

Mediana

$$Me = \frac{4+4}{2} + \frac{8}{2} = 4$$

Ejercicios propuestos

Determine la media, moda y mediana en cada una de las siguientes situaciones problema:

1. Se tomaron 16 empresas como muestra para el análisis de beneficios tributarios según la contratación de personas con limitaciones especiales, en la siguiente tabla se encuentra el número de personas contratadas.

7	9	8	4
3	4	5	5
5	5	5	5
4	5	6	6

2. Los ingresos mensuales de 15 trabajadores de la salud del hospital San Rafael de la ciudad de Tunja son los siguientes: $ 2.000.000, $ 2.500.000, $ 3.000.000, $3.000.000, $ 2.000.000, $ 2.000.000, $ 2.000.000, $ 2.000.000, $ 2.000.000, $ 3.500.000, $21.000.000, $ $ 2.000.000, $3.800.000, $4.000.000 y $ 2.000.000.

3. En el entrenamiento de la cantera del equipo de Patriotas Boyacá, el entrenador les pregunta a los jugadores que ocupan la posición de delanteros, cuál es la proyección de goles que van a anotar en los 10 partidos del campeonato; el entrenador obtiene los datos que se presentan en la siguiente tabla:

4	5	9	5
5	5	5	2
4	5	2	9
6	7	5	2

Medidas de tendencia central para datos agrupados

Medidas de tendencia central datos no agrupados

$$Media = \frac{X_1 \cdot f_1 + X_2 \cdot f_2 + \ldots + X_k \cdot f_k}{N}$$

$$Moda = M = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \cdot C$$

$$Mediana = X_{med} = L + \left(\frac{C}{f}\right)\left(\frac{N}{2} - F\right)$$

L: límite inferior de la clase modal o mediana.

d_1= diferencia entre la frecuencia absoluta de clase modal y la frecuencia de la clase anterior.

d_2= diferencia entre la frecuencia absoluta de clase modal y la frecuencia de la clase siguiente.

C= amplitud del intervalo modal o mediano.

f= frecuencia absoluta de la clase absoluta de la clase modal o mediana.

N= número total de datos.

F= suma de las frecuencias anteriores a la clase mediana.

Ejercicio Solucionado

Los estudiantes de básica que hacen parte de este proyecto de investigación necesitan registrar el número de estudiantes que se encuentran en las escuelas rurales y cursan el grado 3 de básica primaria, estos datos se consignan en la siguiente tabla:

Intervalo	frecuencia
[5-7)	7
[7-9)	10
[9-11)	12
[11-13)	15
[13-15)	9
[15-17)	8
Total	54

Pasos

1. Construimos la tabla de frecuencias

Intervalo	fi	Xi	FA	fi. Xi	Fr	Fr%
[5-7)	7	6	7	42	0,13	13%
[7-9)	10	8	17	80	0,15	15%
[9-11)	12	10	29	120	0,19	19%
[11-13)	15	12	44	180	0,25	25%
[13-15)	9	14	53	126	0,14	14%
[15-17)	8	16	61	128	0,14	14%
Total	61			Σ=676	1	100%

2. Calculamos las medidas de tendencia central:

$$X = \frac{X_1 . f_1 + X_2 . f_2 + ... + X_k . f_k}{N}$$

$$X = \frac{676}{61} = 11{,}08$$

$$M = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) . C$$

$$M = 11 + \left(\frac{3}{3+6}\right) . 2 = 11 + \left(\frac{3}{9}\right) . 2 = 11 + 0{,}66 = 11{,}66$$

$$X_{med} = L + \left(\frac{C}{f}\right)\left(\frac{N}{2} - F\right)$$

$$X_{med} = 11 + \left(\frac{2}{15}\right)(30.5 - 29) = 11 + \left(\frac{2}{15}\right)(1.5) = 11 + 0{,}2 = 11{,}2$$

Ejercicios propuestos

Resuelva las siguientes situaciones matemáticas relacionadas con media, moda y mediana para datos agrupados

1. Los datos de las calificaciones del primer 50 % de 125 estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria se encuentra en la siguiente tabla de distribución de frecuencia:

Calificaciones	fi
[0-2,5)	15
[2,5-5,0)	24
[5,0-7,5)	29
[7,5-10,0)	57
Total	125

2. En una encuesta realizada por una institución de salud, dirigida a 50 mujeres en estado de embarazo sobre el peso que se adquiere en este estado y de acuerdo a los meses de gestación, se obtienen los siguientes resultados:

Peso	fi
[60-76)	7
[76-92)	10
[92-108)	11
[108-124)	13
[124-140)	6
[140-156)	3
Totales	50

3. Los estudiantes de Administración Comercial y Financiera de la UPTC de Tunja, realizan una investigación sobre la inversión que realizan 70 adolescentes en el consumo de comida chatarra. Esta información se encuentra plasmada en la siguiente tabla:

Gasto semanal en pesos	Número de estudiantes
[50.000-60.000)	6
[60.000-70.000)	10
[70.000-80.000)	15
[80.000-90.000)	30
[90.000-100.000)	10
Totales	70

Medidas de dispersión

Medidas de dispersión

Rango: es un valor numérico que se obtiene de la diferencia entre el valor más grande de los datos y el valor más pequeño de los mismos:

$$R = X_{max} + X_{min}$$

Desviación media: es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media

$$Dm = \frac{f_i\,|X_1 - X| + f_2\,|X_2 - X| + \dots + f_m\,|X_m - X|}{m}$$

Varianza: medida estadística que se utiliza para representar cómo varia una serie de datos respecto a su media aritmética:

$$S^2 = \frac{f_1\,(X_1 - X)^2 + f_2\,(X_2 - X)^2 + \dots + f_m\,(X_m - X)^2}{m}$$

Desviación estándar:

$$S = \sqrt{\frac{f_1\,(X_1 - X)^2 + f_2\,(X_2 - X)^2 + \dots + f_m\,(X_m - X)^2}{m}}$$

Ejercicio solucionado

Se consultan las edades de 60 estudiantes de la comunidad educativa de la UPTC con el fin de programar jueves de teatro, se tiene como resultado los datos que muestra la siguiente tabla:

Edad	Nº de personas
[25-29)	**6**
[29-33)	**12**
[33-37)	**14**
[37-41)	**18**
[41-45)	**6**
[45-49)	**4**
Totales	**60**

Pasos

1. Completar la tabla con cada parámetro que se indica en la misma:

Intervalos	fi	Fa	Xi	f %	fi . xi	|xi-x|	|xi-x⁻|²	fi|xi-x⁻|	fi|xi-x⁻|²
[25-29)	6	6	27	10	162	9,2	86,84	55,2	521,04
[29-33)	12	18	31	20	372	5,2	27,04	62,4	324,48
[33-37)	14	32	35	23	490	1,2	1,44	16,8	20,16
[37-41)	18	50	39	30	702	2,8	7,84	50,4	141,12
[41-45)	6	56	43	10	258	6,8	46,24	40,8	277,44
[45-49)	4	60	47	7	188	10,8	116,64	43,2	466,56
Total	60			100 %	2172			268.8	1750,8

$$X = \frac{2.172}{60} = 36,2$$

2. Encontramos las medidas de dispersión:

$$R = X_{max} - X_{min}$$

$$R = 49 - 25 = 24$$

$$Dm = \frac{f_i\,|X_1 - X| + f_2\,|X_2 - X| + \ldots + f_m\,|X_m - X|}{m}$$

$$D_m = \frac{\sum f_i \,.\, |X_i - X|}{m} = \frac{268,8}{60} = 4,48$$

$$S^2 = \frac{f_1\,(X_1 - X)^2 + f_2\,(X_2 - X)^2 + \ldots + f_m\,(X_m - X)^2}{m}$$

$$S^2 = \frac{\sum f_i \,.\, |X_i - X|^2}{m} = \frac{1750,8}{60} = 29.18$$

$$S = \sqrt{\frac{f_1\,(X_1 - X)^2 + f_2\,(X_2 - X)^2 + \ldots + f_m\,(X_m - X)^2}{m}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i \,.\, |X_i - X|^2}{m}} = \sqrt{29.18} = 5,40$$

Ejercicios propuestos

En las siguientes situaciones problema encuentre las medidas de dispersión teniendo en cuenta los pasos del ejercicio anterior.

1. La aplicación de una encuesta a 40 docentes sobre la edad para conformar el grupo de danzas de la facultad, arrojó los siguientes resultados:

Edad	N.º de personas
[40-48)	**5**
[48-56)	**8**
[56-64)	**9**
[64-72)	**11**
[72-80)	**4**
[80-88)	**3**
Totales	**40**

2. En la siguiente tabla se encuentran los rangos de calificación de un grupo de 80 docentes, referente a la nota que obtuvieron en el curso de ascenso en el escalafón de la Secretaría de Educación de Boyacá:

Calificación	N.º de estudiantes
[10-15)	0
[15-20)	1
[20-25)	2
[25-30)	3
[30-35)	3
[35-40)	2
[40-45)	47
[45-50)	22
Totales	80

3. Los estudiantes de séptimo semestre de Ingeniería Agronómica de la UPTC, adelantan una investigación sobre el crecimiento de la flor de la papa en el municipio de Cómbita, en un periodo de tiempo de 40 días, de acuerdo a los cambios de clima; los datos que se obtuvieron están consignados en la siguiente tabla:

Crecimiento (cm)	Días
[1-3)	**5**
[3-5)	**4**
[5-7)	**6**
[7-9)	**4**
[9-11)	**10**
[11-13)	**11**
Totales	**40**

Medidas de posición

Medidas de posición

Cuartiles: son medidas estadísticas de posición que tienen la propiedad de dividir la serie estadística en cuatro grupos de números iguales de términos.

$$Q_k = L_{i-1} + \frac{\frac{KN}{4} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

Deciles: son medidas estadísticas de posición que tienen la propiedad de dividir la serie estadística en diez grupos de números iguales de términos.

$$D_k = L_{i-1} + \frac{\frac{KN}{10} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

Percentiles: son medidas estadísticas de posición que tienen la propiedad de dividir la serie estadística en cien grupos de números iguales de términos.

$$P_k = L_{i-1} + \frac{\frac{KN}{100} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

Ejercicio solucionado

Para la siguiente situación problema encuentre las tres medidas de posición: cuartiles, deciles y percentiles.

Con miras a los juegos universitarios el entrenador de baloncesto de la Universidad Mariana consulta las estaturas de 40 de los posibles jugadores que conformaran el equipo. Los datos se registran en la siguiente tabla:

Estatura	N.º de estudiantes
[145-155)	4
[155-165)	9
[165-175)	6
[175-185)	12
[185-195)	9
Totales	40

Determine el cuartil 2, el decil 6 y el percentil 77

Pasos

1. Realice la distribución de frecuencias en su respectivo esquema:

Intervalo	fi	Xi	FA	Fr	Fra	Fr%
[145-155)	**4**	150	4	0,1	0,1	10
[155-165)	**9**	160	13	0,225	0,325	22,5
[165-175)	**6**	170	19	0,15	0,475	15
[175-185)	**12**	180	31	0,3	0,775	30
[185-195)	**9**	190	40	0,225	1	22,5
Total	40					100%

2. Encuentre las medidas de posición

Cuartil:

$$\frac{KN}{4} = \frac{2\,(40)}{4} = 20$$

$$Q_k\ L_{i-1} + \frac{\frac{KN}{4} - F_{i-1}}{f_i}\ .\ a$$

$$Q_2 = 175 + \frac{20 - 19}{12}\ .\ 10 = 175 + \frac{1}{12}\ .\ 10 = 175 + 0{,}83 = 175{,}83$$

Decil:

$$\frac{KN}{10} = \frac{6\,(40)}{10} = 24$$

$$D_k = L_{i-1} + \frac{\frac{KN}{10} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

$$D_6 = 175 + \frac{24 - 19}{12} \cdot 10 = 175 + \frac{5}{12} \cdot 10 = 175 + 4{,}16 = 179{,}16$$

Percentil:

$$\frac{KN}{100} = \frac{77\,(40)}{100} = 30.8$$

$$P_k = L_{i-1} + \frac{\frac{KN}{100} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

$$P_{77} = 175 \quad \frac{30.8 - 19}{12} \cdot 10 = 175 + \frac{11.8}{12} \cdot 10 = 175 + 4{,}16 = 184{,}83$$

Ejercicios propuestos

Para las siguientes situaciones problema encuentre las medidas de posición pedidas.

1. Para los juegos interuniversitarios de ASCUN, los deportistas de la UPTC en lanzamiento de disco se preparan y realizan un entrenamiento con 50 tiros el día viernes. Los datos de esos lanzamientos se encuentran en la siguiente tabla

Distancia en (m)	N.º de lanzamientos
[35-39)	10
[39-43)	11
[43-47)	15
[47-51)	8
[51-55)	6
Total	50

Halle la siguiente información:

a. El cuartil 3.

b. El decil 9.

c. El percentil 84.

2. Una encuesta realizada a 40 estudiantes sobre la cantidad de días que realizan deporte durante el año, arrojó los siguientes resultados:

Interval de días	Número de estudiantes
[40-45)	3
[45-50)	7
[50-55)	10
[60-65)	15
[65-70)	12
[70-75)	3
Totales	50

Determine:

a. El cuartil 2.
b. El decil 5.
c. El percentil 69.

Glosario

Ahorrro: excedente de cualquier bien económico al final de un lapso de tiempo.

Capital: cantidad total de dinero o cantidad de dinero solicitado.

Correlación: correspondencia entre dos magnitudes que puede ser directa o inversa.

Costo: cantidad de dinero que se emplea para la elaboración de un producto o de un proyecto en general.

Financiera: uso recurrente en el ámbito de las finanzas y de los negocios.

Interés: indicador utilizado para establecer la rentabilidad de un ahorro o el costo en un crédito financiero.

Inverso: que es opuesto o contrario a lo inicialmente propuesto.

Magnitud: propiedad de los cuerpos que se puede medir como el tamaño, el peso o la extensión.

Porcentaje: cantidad matemática que indica la parte de un todo.

Propiedad: atributo o cualidad de un objeto.

Proporción: relación de correspondencia entre dos magnitudes.

Razón: relación entre dos magnitudes que generalmente se expresa como a es b.

Regla: principio que se impone o se adopta para dirigir la correcta realización de una acción.

Rentabilidad: relación entre los beneficios y la inversión que se expresa en porcentajes.

Reparto: hace referencia a distribuir una cantidad en partes iguales, en forma directa o inversamente proporcional.

Utilidad: capacidad de algo concreto que genera beneficio.

Bibliografía

AA. VV. (2008). *Matemáticas I Bachillerato*. Editorial Santillana.

AA.VV. (2016). *Proyecto siglo XXI. Matemáticas 10*. Editorial Santillana Colombia.

Abdón-Montenegro, I. (2015). *Evaluemos competencias matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio.

Baldor, J. A. (1999). *Aritmética.* Cultural Colombia.

Ballen, M. (2002). *Aritmética y geometría I.* Santillana.

Barnett, K. (2001). *Matemática 8.* McGraw-Hill.

Bell, E. T. (1990). *Historia de las matemáticas.* Fondo de Cultura Económica.

Bruno, G. M. (1986). *Curso medio y curso superior de aritmética*. Editorial Bedout.

Celis, M., Jiménez, Ó. y Jaramillo, J. (2012). ¿Cuál es la brecha de la calidad educativa en Colombia en la educación media y en la superior? En: *Estudios sobre calidad de la educación en Colombia* (pp. 67-89). Icfes.

Chacon , J. y Gonzalez, J. (2008). *Hacia el Aprendizaje de la Matemática*. Grupo K-tdra.

Díaz, F. A. (2002). *Nuevo pensamiento Matemático 8.* Libros y libros.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El Aprendizaje de las matemáticas*. MEC/Labor.

Feund, J. y Simon, G. (2001). *Estadística elemental*. Prent Ingeniería.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Síntesis.

Galdos, L. (1989). *Matemáticas Galdós.* Cultural S. A.

Harles, M. (2006). *Matemática Razonamiento y Aplicaciones.* Pearson.

Hostetler, R. (2002). *Matemática 10*. McGraw-Hill.

Jerome, E. y Karen, S. (2000). *Algebra Intermedia.* Editorial Thomson México.

Kaufmann, J. y Schwitters, K. (2001). *Algebra intermedia.* Educativa.

Manson, J; Burton, L.; Stacey, K. Pensar matemáticamente. Editorial Harla S. A. de C.V.,1993.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje matemáticas y ciencias ciudadanas. https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-116042.html

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2017). *Vamos a aprender matemáticas 7*. Editorial SM.

Morales, M. (2010). *Matemáticas 11 hipertextos*. Editorial Santillana.

Ortiz-Wilches, L. G., Ramirez-Rincon, M., Joya-Vega, A., Cell-Rojas, V., Acosta, M. L., Perdomo-Pedraza, A. C., Morales-Jaime, D. J. y Gamboa-Sulvara, J. G. (2013). *Los caminos del saber matemáticas 7*. Santillana.

Perelman, Y. (1996). *Aritmética recreativa*. Mir.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Pozo, J. I. (1994). *La solución de problemas*. Santillana.

Rueda, F. (2007). *Nuevas Matemáticas 8*. Editorial Santillana.

Vásquez, C. (1984). *Estadística básica. Biblioteca Santillana de consulta, tomo 8*. Santillana.

Villegas, M. (2002). *Matemática 10*. Voluntad.

Autores

José Weymar González Pulido

Docente de planta de la Universidad Pedagógica y Tecnológica sede Tunja, Facultad de Estudios a Distancia del programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria; licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; especialista en Educación Personalizada de la Universidad Católica de Manizales; magíster en Educación de la UMECIT de Panamá y estudios de doctorado en Educación. Docente investigador categorizado en JUNIOR con publicaciones de artículos en revistas indexadas nacionales e internacionales.

José Antonio Chacón Benavidez

Licenciado en Física y Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; especialista en Educación Personalizada de la Universidad Católica de Manizales; magíster en Educación. Experiencia docente 27 años, docente investigador con publicaciones de artículos en revistas indexadas nacionales e internacionales; actualmente es docente del programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Luís Ángel Fonseca Correa

Licenciado en Física y Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; magíster en Didácticas de las Matemáticas, Universidad Internacional de la Rioja, España. Experiencia docente 23 años; actualmente, docente del Colegio de Boyacá y Corporación Universitaria Uniremington.


X+Y=3
y=3x+6
DIOS HOGAR PATRIA
UNIVERSIDAD MARIANA
Universidad
Mariana
Res. MEN 1362 del 3 de febrero de 1983
Editorial
UNIMAR